计算出人意料

——从开普勒到托姆的时间图景

伊法尔·埃克朗 著　史树中 白继祖 译

上海教育出版社



图书在版编目（CIP）数据

计算出人意料／（法）埃克朗著；史树中，白继祖译．
上海：上海教育出版社，1999.4（2000.3重印）
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-6270-8

I．计…　II．①埃…②史…③白…　III．突变理论-通俗读物　IV．O192-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第15792号

Ivar Ekeland

Le Calcul, l'Imprévu

Les figures du temps de Kepler à Thom

Éditions du Seuil

根据舍依出版社1984年第1版译出，

通俗数学名著译丛

计算出人意料

——从开普勒到托姆的时间图景

［法］伊法尔·埃克朗　著

史树中　白继祖　译

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版

（上海永福路123号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店经销　上海中华印刷有限公司印刷

开本 850×1156　1/32　印张 4.25　插页 4　字数 98,000

1999年4月第1版　2000年4月第2次印刷

印数 5201—10200本

ISBN 7-5320-6270-8/G·6425　定价：(软精)7.60元

译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,正阔步迈向21世纪.

回顾即将过去的世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际,世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作,国际数学联盟(IMU)还专门将2000年定为"世界数学年",其主要宗旨就是"使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解".

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物.激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物.推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;……等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围,为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气,有关选题逐年减少,品种数量不断下降.在这样的情况下,上海教育出版社以迎接2000世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接2000世界数学年,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

献给

凯瑟琳

目　　录

引　言

很久以来，我就想写一本关于突变理论的书．那时，我只是将突变理论看作一部更为广泛的、论述时间的数学中的惊人进展的著作的一章．新思想已经引入物理学；公众也已熟悉奇异吸引子和费根鲍姆(Feigenbaum)分岔．我要写的书，就是要宣告新思想即将进入科学实践和我们的知识观念中的革命．

随后，我又意识到，新思想已出现一百多年，而我心目中的书也早已问世，甚至已经多次．庞加莱[①]在本世纪初已经澄清最意味深长的现象，并且煞费苦心地在一系列至今仍为某种典范的通俗著作中阐述．伯格森[②]也同样对此了如指掌，并且以当时的精确科学的方式写下决定性的篇章．尤其是，他们两位都被众多动人心弦的例子所吸引，以至可以推想，这些都已被人们读到．

那么何必再重写呢？我的失望甚至是天长地久的："普天之下，历来如此．有什么东西能使人说：'啊，这是破天荒的！'？它几百年前早就有过．没有对古人的追溯，就不再有他们的继承者；在继承者那里只有追溯．" [9]

---

① Henri Poincaré(1854—1912)，法国数学家和物理学家．——译者注

② Henri Bergson(1859—1941)，法国哲学家，1927 年诺贝尔文学奖获得者．——译者注

然而，我想，总还有一些事情可说；尤其是可换一种方式来说．许多新事物的到来支持了先驱者们的天才直觉．经过几代研究者的精心刻画，加上当代大师托姆[①]、阿尔诺德[②]、斯梅尔[③]的贡献，再通过令人惊奇的实验和突如其来的悖论的解释，这些新事物在今天已经变得更容易向非专家们传播；就像是一些经过无数次访问和研究的遥远的地方，当人们用智慧才能的照相机镜头对它拍摄观看时，新的景观就暴露无遗．

人们应该做的是从中综述几个关键时刻，它们构成此后现代科学赖以矗立的景象．

开普勒[④]的三大定律曾经不过是一种天文奇观；以椭圆轨道绕太阳运转的行星的图象被许多代的研究者所公认，并且已超出精确科学的界限．这是被经常引用的、隐含现代思想的参照例子之一；而牛顿[⑤]的发现至今仍是整个科学知识的原型．我们可以用同样的方式，通过几个生动的形象：阿尔诺德的猫、斯梅尔的马蹄铁、托姆的皱褶，来综述新近的进展．这些形象在所有科学领域中都唤起反响，并且注定要成为我们的文化遗产的一部分．这将成为后代人的"家族遗像"；它们是如此为人熟知，以[10]致人们都不再去看它们；但一旦若有所失，人们才会感到其宝贵．

这就是我将试图介绍的当今科学家族的相册中的几幅照片．

自然，更容易做的是随大流去参加论文竞赛．当前的进展是

---

① René Thom(1923—)，法国数学家，突变理论创始人．1958年菲尔兹奖获得者．——译者注

② Vladimir Igorevič Arnold(1937—)，俄国数学家．——译者注

③ Stephen Smale(1930—)，美国数学家．1966年菲尔兹奖获得者．——译者注

④ Johannes Kepler(1571—1630)，德国天文学家．——译者注

⑤ Issac Newton(1642—1727)，英国数学家和物理学家．——译者注

如此迅速，竞争中所提出的问题是如此激动人心；置身于其中的人真感到进退两难.那么为什么还要写这本书呢？这里，我还是再让一位不知是谁的古代智者来说话：

“告诉我！所有那些你所熟知的、仍然活跃于他们的研究领域的以往的学者，他们在哪里？另一些学者已经占有了他们的封号，但我不知这些人是否还怀念他们.”

我不相信人类自中世纪以来有很大改变.知识分子的责任感问题也几乎没有变化.他们应该向社会各阶层传播知识，引起同代人对世界和他们自身的反思.相反，我们看到人们被禁锢在学校中，其代价是某个大学位置.至于那些真正推动科学发展的学者们，他们并不关心与非专家交流他们的思想；他们为科学而研究科学，而外行们的意见是不足道的.他们错了，因为研究科学是为了人类，而在学者与公众之间的地带就这样被抛弃或者保持空缺，令人遗憾；或者更糟糕的是被一帮江湖骗子所占领.

因此，两者之间更好的接触是必要的.我们应当摆脱某些带着科学色彩的陈腐思想或者某个得逞的东拼西抄者的纯粹胡言.尤其要传播更忠于科学及其苛求的形象；首要的是要让读者自己理解.如果本书能把读者带入这样的境界，那就达到了它的目的. [11]

第1章 天体的音乐

开普勒定律

下面的图象是人们早就熟悉了的.它表示一颗绕太阳运转的行星;为指出其轨道是椭圆而不是圆,我们用一个扁平的夸张图形来画出轨道.在所有的初等教科书中,它纯朴地表明这样一个思想:地球环绕太阳运转,并且谆谆教导年轻一代,这是他们的先辈们用了二三千年才发现的一条真理.高中学生都能说出开普勒三大定律:

Ⅰ——所有行星的轨道都是椭圆,太阳位于这些椭圆的焦点之一;

Ⅱ——联结太阳与行星的(非物质)线段 SP 在相同的时间内扫过相同的面积;

Ⅲ——如果取两颗行星 P(周期为 T,长轴为 a)和 P'(周期为 T',长轴为 a'),则比值$\frac{T^2}{a^3}$和$\frac{T'^2}{a'^3}$相等.

第一条定律给出轨道的形状.第二条定律确定了行星沿其轨道运转的速度:当行星接近太阳时,它便加速运行;当行星远[13]离太阳时,它便减速运行.第三条定律联系着速度与轨道的大小,它与行星的物理特征没有关系:行星越远,其运行速度越慢.

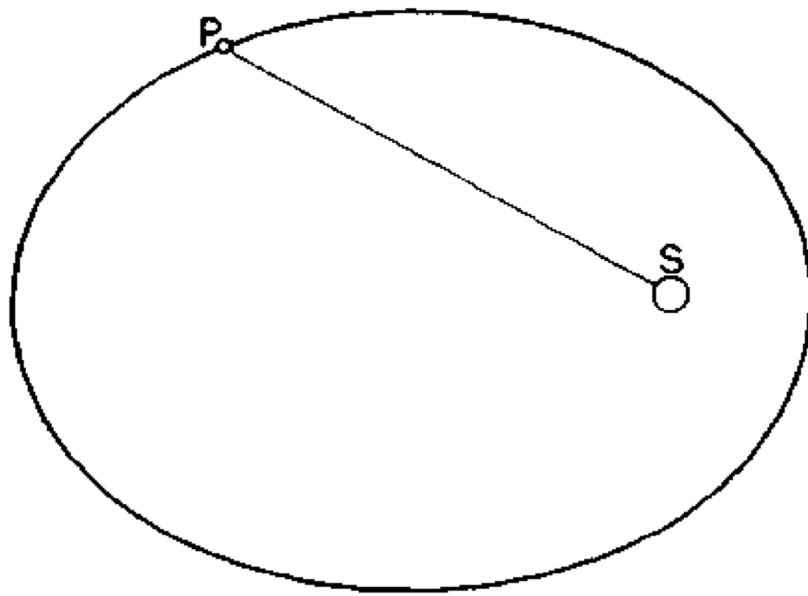


图 1 椭圆轨道. S 位于焦点之一.

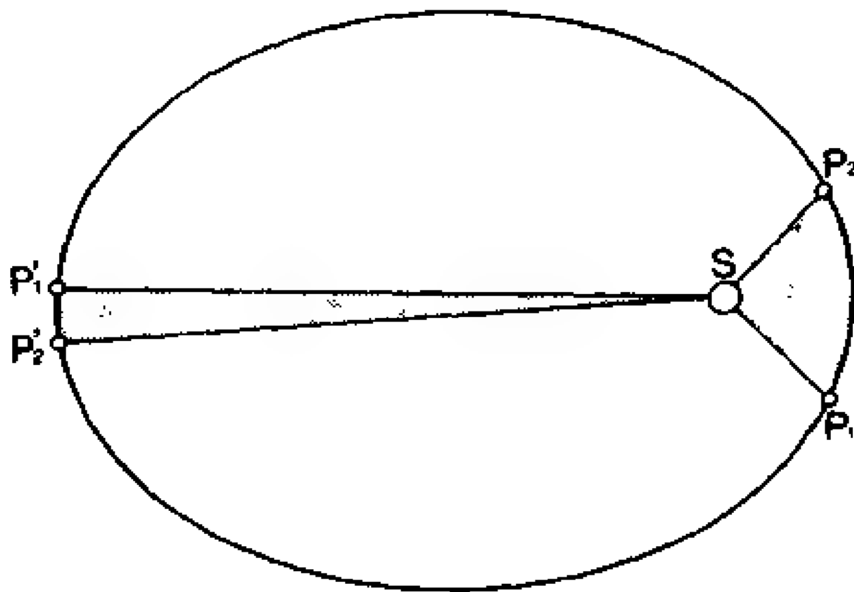


图 2 面积定律. 弧 P_1P_2 及 $P'_1P'_2$ 运行同样的时间. [14]

如果我们把九大行星的运行轨道实际上是在同一平面上的事实,结合开普勒三大定律,我们就得到了行星运动的一个完整的描述. 从水星到冥王星,九个椭圆间一个套一个,其上九大行星都沿同一方向环绕运转. 这是按太阳系的比例的永恒的赛马

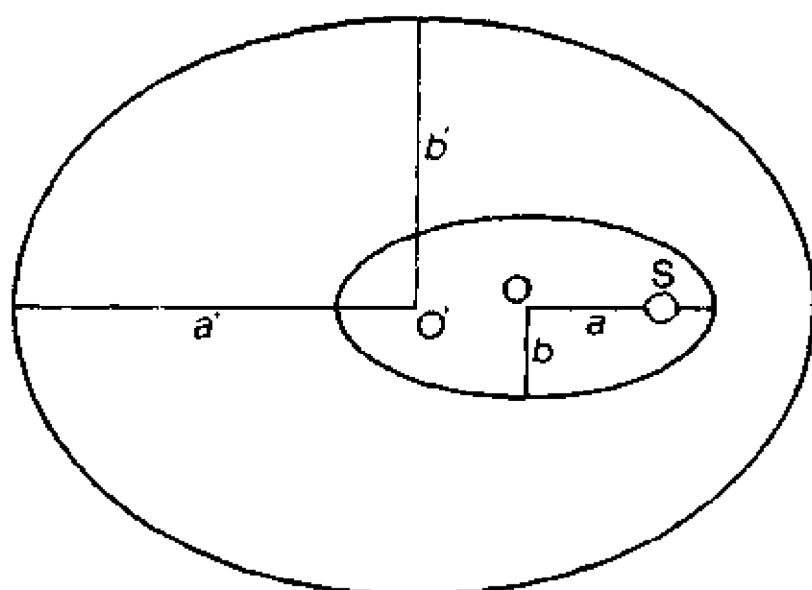


图 3 $\frac{a'}{a}=2$，因而$\frac{T'}{T}=2.8$．开普勒椭圆有相同的焦点 S，但中心不同．它们的形状，以至与此相关的 b 和 b' 的值，并不重要．

（冥王星比水星离太阳远 100 倍，绕太阳一周的时间是水星的 1000 倍），它当然使人无法用准确的比例尺表示出来．

[15] 那是 1605 年，开普勒发现火星的轨道是椭圆．他宣布他的前两条定律是在他的著作《新天文学(Astronomia nova)》(1609)上，而第三条定律则是在他的《世界的和谐(Harmonices Mundi)》(1618)上．我们可以毫不夸张地说，这是历代最伟大的科学发现．对于许多世纪来，困扰人类最优秀的智者：欧多克斯①、亚里斯塔克②、托勒密③、哥白尼④的一些问题，开普勒给出了一个

① Eudoxe de Cnide（公元前 408—355），古希腊天文学家和数学家．——译者注

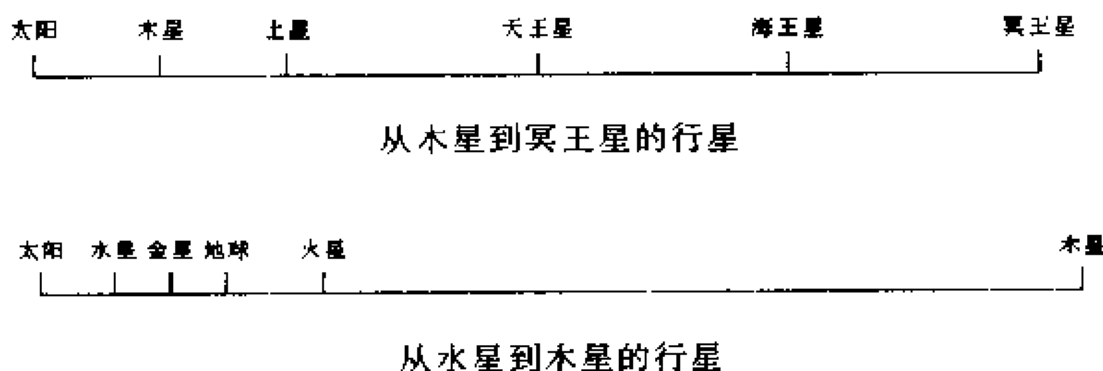
② Aristarque de Samos(公元前 310？—250？)，古希腊天文学家．——译者注

③ Claudius Ptolemaeus(100？—170？)，居于埃及的古希腊天文学家和数学家．——译者注

④ Nicolaus Copernicus(1473—1543)，波兰天文学家．——译者注

完整的答案.让我们来听听开普勒的凯旋曲(《世界的和谐》前言):"现在,处于极为美妙的沉思中的我的内心,18个月前被第一束曙光照亮,3个月前被一个特殊的日子所照亮,而很少有日子被太阳光自身照亮.什么也不能使我从神圣激情的沉醉中抽身出来,什么也不能阻止我面对世俗的人间,坦荡地承认,为了献给上帝的祭坛,我窃取了埃及人的金瓶,尽管离埃及的边界那样遥远.如果你们相信我,我欣慰;如果你们怒斥我,我忍受.不管命运如何,我写我的书;人们现在读它,还是让后代来读它,这无关紧要:如果说上帝为他的作品的一个沉思者已等待了六千年,我的书也可等待读者一百年."

[16]



从木星到冥王星的行星

从水星到木星的行星

图 4

任何在天文馆里或者在天文图册前跟踪在黄道带上跳着踌躇的进二步、退一步的圆舞曲的火星的人,都不会有开普勒那样的极端的热忱.火星固然是在其黄道的一般方向上移动,但是它又在黄道周围不规则地摆动;重新前进以前,总是果断地先向后走,以至其轨线成了充斥后绕的乱线团,就像一个初出道的渔夫扔在深水中任其乱缠的钓鱼线.木星和土星也有相同的情况.内行星金星和水星,由于其靠近太阳,还给观察者提出另一些问题.比如,所谓"晨星"和"暮星"其实是同一颗行星,即相对于太阳的不同位置下的金星.确认这一事实,就已经假设一整套天文学理论.

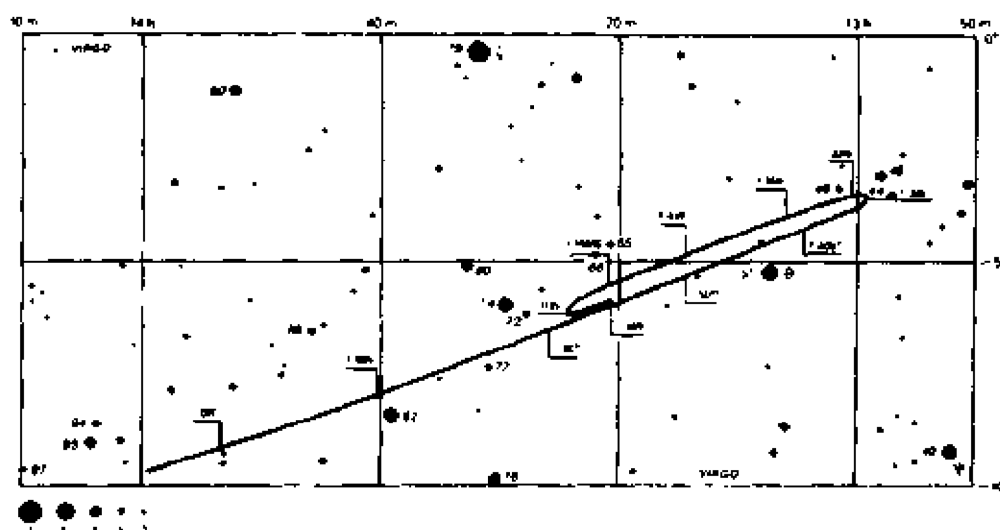


图 5　1982年1月1日到1982年12月31日的土星位置.人们可看到它的后退运动(天文局年鉴,1982年星历表,高蒂埃—维拉尔(GauthierVillars)出版社).

[17]

清理行星轨道,就像要从乱缠的带许多鱼钩的钓鱼线中理出头绪来一样,必须要有无限的耐心,何况它们又是在太阳系那样的尺度下进行.开普勒得益于托勒密和哥白尼的已经十分精确的理论以及第谷·布拉赫①的观察.他并未因此减轻埋头于多年的惊人的计算.没有电子计算器,没有对数表.保存在普尔可沃②图书馆的计算手稿有成千上万页.在《新天文学》中,他写下了对开的15页计算结果,并且恳求读者同情不幸的作者,这是他反复计算70次才得到的解.我们再来说渔夫,他看到他把钓鱼线垂直放到水中,那么他是否有某种理由相信当他把钓鱼线重新提出水面时,他能理顺这条线?支持某个托勒密或是某个开普勒努力奋斗的就是对宇宙中隐藏的和谐的不可动摇的信念.

① Tyho Brahe(1546—1601),丹麦天文学家.——译者注

② Pulkovo,俄国圣彼德堡附近、建于1834年的天文观象台所在地.——译者注

开普勒三大定律是几代天文学家的胜利;这些天文学家在时间上可追溯到远古,在地域上涉及广泛,从中国人到玛亚人,从迦勒底人到阿拉伯人.他们都坚持在那些他们看不到的地方赋以和谐和规律.用肉眼来看,行星的运动像一条湍急的河流那样有规律.那么,为什么不满足于这种整体印象,不满足于黄道的一般方向上的均匀运动的印象,而要不惜一切代价去解释行星的个体运动的甚为偶然的事件呢?

当然,这些知识并非是完全无关紧要的.自最远古时期起,星象学的需要已经使得预测行星在黄道带上的位置成为非常重要的实际大问题之一.开普勒本人作为皇家数学家,肩负建立占[18]星术和预卜天象的重任.在其生涯之初,他已非常幸运地预报了一个十分寒冷的冬天,多次农民暴动和对土耳其的战争;这使他声望大增,远超过他后来发表的所有学术著作给他带来的荣誉.日历的推算,特别是确定复活节的日期,同样提出了一些难度很大的天文学问题,它们的求解需要对地球、太阳和月亮各自的运动有精确的了解.

但是除了这些对我们来说早就过时的实际考虑外,还有一种深层次的理论欲望,一种对宇宙具有某种和谐的坚信;上帝以他的智慧创造了世界,而这种和谐或这种智慧,虽然隐藏着,却以简单的方式来表达.这些至今仍然是我们的信念,因而我们是开普勒和他所遵循的整个传统的继承者.借助于他们的信念,他们给我们遗留下他们的方法,因为他们教导我们,自然界的奥秘最好是用一种数学语言来揭示.就像伽里略①所说,自然界的大书是用几何图形:圆、三角形和正方形来写成的.

人们可注意到,伽里略不谈椭圆;这似乎无关紧要,但有其重要性.在数学上,反映直观的图形是比仅用来解释直观的文字

① Galileo Galilei(1564—1642),意大利天文学家、物理学家和数学家.——译者注

更为重要.然而,一直到开普勒为止的经典天文学家们都拒绝考虑除圆以外的其他图形和除匀速运动以外的其他运动.处理其他图形与运动的技巧方法早就有过:关于椭圆的几何性质,开普勒引证了阿波罗尼①,关于遵循面积定律的运动的研究,则引[19]证了阿基米德②.而直到《新天文学》为止,所有的宇宙系统都或多或少是圆和匀速运动的精巧的组合.

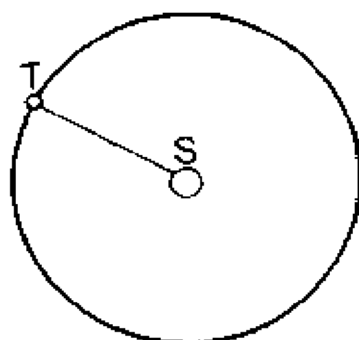


图 6 亚里斯塔克系统.行星轨道都是圆形的,太阳位于圆心,而行星都以常速运动(图中 T 表示地球,S 表示太阳).

最简单的是亚里斯塔克系统,其中太阳在宇宙的中心,所有行星环绕它在圆周轨道上作匀速运动.尤其是要求地球是圆球状的,并且自身也在旋转.这对于一位公元前三世纪生活在萨摩斯③的人来说,该是一个多么具有惊人现代意识的构思.同时,圆是开普勒轨道的极好的近似:在当时已知的所有行星中,火星轨道是最扁的,长短轴之差也仅有 0.5%.但是,不应将太阳置于轨道的中心,因为它与开普勒焦点的偏差达到 9%.尤其是,轨道上的运动不是匀速的:因为根据面积定律,行星越接近太阳,其运转速度越快.所有这些误差的累积,使火星在某些时

① Applonios de Perga(公元前 262—180),希腊数学家.——译者注

② Archimede(公元前 287—212),希腊数学家.——译者注

③ Samos,爱琴海中的希腊岛屿.——译者注

代与它实际位置的偏差竟达到 15°. 这种理论与经验之间的偏 [20] 差是不可接受的,以至希帕库斯[1]的模型被一些更为脆弱、但更接近于观察数据的构想所否定.

比如,托勒密系统导致几度的数量级的误差. 开普勒时代已知的最精确的天文表是根据哥白尼系统于 1551 年建立的普卢坦尼克表(Tabulae Pruthenicae),正如开普勒所揭示的,包含 4° 到 5°的误差. 传说,哥白尼对自己提出的观察精度的目标是 10 弧分,即六分之一度. 我们可看到,它离此目标尚远.

然而,对于哥白尼,正如对于到开普勒为止的所有天文学家一样,出于他们的文化境界,他们对问题的感受被他们所设想的图象所歪曲. 他们对自己提出的问题不是:"怎样更好地描述行星运动?"而是像个小作坊的工匠,只管拿手中现成的材料墨守成规地制造产品. 这样的作坊已经开了两千年,工匠们一代接着一代,用着同样的工具,用着同样的材料,没有一个人试图去创新.

一些形象横空出世,当它们风华正茂时,所向披靡;而当它们年暮体衰时,又顽固挡道;这些就是本书的主题. 极为简单的匀速圆周运动(一个质点以常速在圆周上移动)形象就是其中的一个突出例子. 这一形象孕育了托勒密系统,它是人类智慧的重大架构之一. 系统基于以下三个天才的发明:

——本轮. 它涉及中心在一个固定的大圆上移动的一个小 [21] 圆. 如果现在有一个点在小圆上匀速移动,则在一个固定的点看来,它的运动将与在地球上看行星一样,有同样的加速与减速的交替,以至倒退.

---

[1] Hipparchus, 卒于公元前 127 年以后的希腊天文学家和数学家. —— 译者注

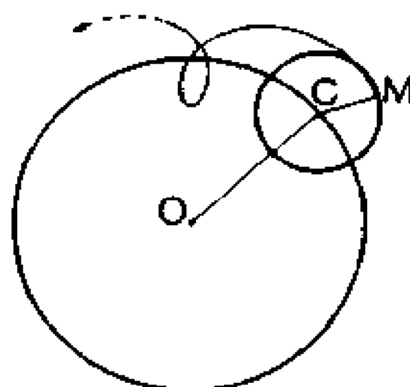


图 7 一个本轮.小圆的中心 C 在大圆上匀速移动.与此同时,点 M 在小圆上匀速移动.两种运动的复合赋予点 M 交替地加速和减速.

——等分点.设想有一个固定的圆和一个偏离中心的内点:这将是一个等分点.设想圆周上的一个运动,该运动相对于圆心来说并非匀速的,但关于这个等分点是匀速的,即从等分点出发度量的角速度是常数.这样,动点在圆周上就不具有常速:当它接近等分点时加速,而当它远离时减速.就像行星在其轨道上那样.

——偏心.地球不必置于系统的中心.托勒密使地球处于每一行星轨道上的等分点的对称位置上;这就不知不觉地接近于[22] 开普勒的两个焦点的观点.

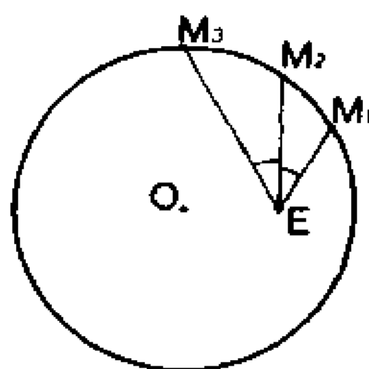


图 8 一个等分点.点 M 在圆心为 O 的圆周上移动.从点 E 出发来看,在相同的时间段内它将经过相同的角度.然而,比如从圆心 O 去度量角度,情况就不再是那样.

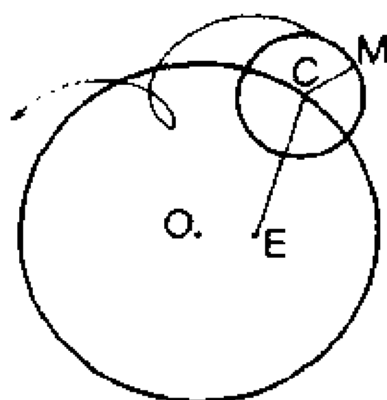


图 9 托勒密系统：一个本轮与一个等分点的复合.

借助于本轮、等分点和偏心，在公元2世纪左右，匀速圆周运动使得预测行星的位置达到度的精度.经过十四个世纪，这方面不再有任何值得称道的进展；它清楚地说明，需要寻求新的方法.相反，匀速圆周运动的形象则作为一种古已有之的传统，根深蒂固，牢不可破，成了研究者精神上的沉重枷锁. [23]

对此人们有充分的理由！凭借亚里士多德①的权威，哥白尼指出匀速圆周运动是最完美、最自然的运动，因而它是天体力学中能够采纳的独一无二的手段.不那么教条、但同样专断的第谷·布拉赫在1600年写给开普勒的信中说："天体的环路图应该完全由圆周运动来构成；否则它们就不会不断地、均匀地周而复始，以至丧失了永恒性.不要企图使这些环路减少单纯和增加不规则，以至使之既不适于研究也不适于计算."至于开普勒自己，《新天文学》记载了他的思想的各个阶段：先是对地球以外的行星赋以完全的圆周轨道，接着，在他考虑椭圆以前，又用一个本轮来把它们复杂化.我们听听他的讲话："我的第一个错误是曾经承认行星的轨道是完全的圆.这个错误使我付出了加倍的时间，而它却受到所有哲学权威支持，以及在思维上完美无缺."

---

① Aristote(公元前384—322)，古希腊哲学家.——译者注

一种如此树大叶茂的思想也不会轻易地被根除.它需要等上一个世纪以及补上牛顿才使所有的天文学家成为开普勒派.就是这样,一种简单而有成效的几何表示窒息了人们的想象力,僵化了人们的直觉.就是这样,工匠拒绝放弃他手中的陈旧但得心应手的工具.

[24] 然而,一个世纪以后,天文革命终于实现.开普勒椭圆和面积定律赶走了天空中的匀速圆周运动.一种新的解释模式凝结为一种简单的几何表示,一种形象;它新领风骚,将塑造几代研究者的直观.它也将身临其辉煌的时刻,其成就聚集在一点是令同代人深信已掌握宇宙的钥匙;而我们将自问,今天我们是否生活在它的衰败时代.

天 体 力 学

托勒密的圆和开普勒的椭圆是用几何语言对下列公共追求的两种翻译:我们期望自然现象是永恒的和有规律的,一句话,是可预测的.

当18世纪把宇宙比作一个钟表的时候,人们参照的是托勒密模型的最后变种还是牛顿机械论的最初胚胎并不很重要.重要的是,比较是可能的,因而是可使人放心的.此外,人们毫不犹豫地把比较推得更远:对于伏尔泰①,就像对于他的同代人那样,"钟表孕育着钟表匠".为了获得一位学者坚定的无神论宣言,这还要等到世纪末;它就是拉普拉斯②对拿破仑③的著名回答,当后者问道上帝在他的系统中的地位时,他说:"陛下,我不

---

① François-Marie Arouet Voltaire(1694—1778),法国哲学家和作家.——译者注

② Pierre-Simon Laplace(1749—1827),法国数学家、天文学家和物理学家.——译者注

③ Napoleon Ponaparte(1769—1821),法国皇帝.——译者注

需要这个假设."

但是另一些崇拜对象应运而生.这是人们开始谈论以大写字母S开始的科学(Science)的时代.这是一种新的宗教,其布道者们极为虔诚,但经常十分狭隘,局限于新的教义.我们听听这 [25] 同一位拉普拉斯对此是怎么说的:"在无知的年代里,人们曾经远没有想过,自然总是服从永恒不变的规律.根据自然现象的到来,它或是有一定规律地相继出现,或是无明显次序地逐个显露,人们把它们归结为或是有其终极起因,或是纯属完全偶然;一旦有所异常,似乎违背自然秩序,人们就把它看作天怒的征兆①."

含义是清楚的:存在一个永恒不变的自然秩序.自然现象是有规律的;如果出现紊乱,那只是表象.诚然,在拉普拉斯时代,信条找到了它的最终形式,万有引力的奥秘被揭去了面纱,而科学完成了它的第一批奇迹.然而,信仰更为高瞻远瞩,事实上,它已驾驭着自古以来天文学的全部发展.如果说人们已经不断地完善模型,细化观察,那么这就是说,人们深信一种由此及彼的可能的一致性,甚至期望它会十全十美.

比如,开普勒抛弃他的一个使他耗费多年心血的假设,因为对于行星的某些位置,所记录的计算与观察之间的最大偏差达到8弧分.这是从100米外来看一个碟子的视角,微不足道,并且肯定在古代天文学的精度范围之内.不幸的是,观察是第谷·布拉赫所作的;根据开普勒所说的话本身:"苍天有幸,降给我们如此有价值的观察者第谷·布拉赫,他的观察向我们揭示了托勒密所造成的8弧分的误差.我们理当接受上帝的这一恩赐,并从 [26] 中获益.这意味着我们必须效力于最终发现天体运动的真实结构."

① 《世界体系展示(Exposition de système du monde)》,第Ⅵ册,第Ⅵ章.——原注

因此，一种更高精度的研究与一种假想的“真实结构”的探求并肩而行，后者将一举揭露隐藏在自然中的整个秩序．奇迹是看到这一探求的成功，而牛顿带回了最后晚餐的圣器．18 世纪末，博普①写道：

大自然及其规律在黑暗中隐藏；

上帝说：让牛顿去吧！于是一切笼罩着光芒．

而拉普拉斯则声称，牛顿在 1687 年问世的巨著《自然哲学的数学原理》“高踞于人类其他智力产物之上”．

传说 1666 年牛顿为躲避肆虐于伦敦及其周围的一场大鼠疫而来到乡下，经过 24 年，他获得了他的主要成果；但是这是一部比传说更为激动人心的著作．标题本身就是独树一帜的：它不再涉及外部的描述，而是要了解内部．开普勒三大定律刻画了行星的运动，并且在一定的精度范围内，能用来预测行星的位置．但是直到牛顿为止，无论是开普勒，还是其他什么人，都不能回答下列问题：“谁在使行星运动？”

我们可以说，牛顿也没有给出回答：享有盛名的万有引力定律说明太阳以什么方式使行星移动，但是它既没有说怎样，也没有说为什么这种作用得以进行．“物质对物质的引力与质量成正比，与距离的平方成反比”的说法并没有彻底回答所有问题：什么是物质？为什么有这一引力？在被真空分隔开的物体之[27]间，这种引力是怎样作用的？牛顿本人把万有引力宁愿看作是一种人为的数学概念，而不是物理现实．他很快就被一些把“牛顿定律”当作科学知识的最终理性(ultima ratio)的热忱的信徒们所超越．但是，在 19 世纪，就像对于主宰万有引力的牛顿定律那

① Alexander Pope(1688—1744)，英国作家．——译者注

样，对于主宰电力的库仑[1]定律又提出了同样的问题. 这一回，先是法拉第[2]，后是麦克斯韦[3]拒绝止步于对这种距离作用的简单验证，而是致力于建立电场的概念：这种电场是物体间作用的媒体，并以有限速度传播作用. 从电场到引力场仅一步之遥，而场论作为经典物理的胜利，不久就具有讽刺意味地摧毁了牛顿殿堂的基础，引发了相对论革命. 今天，如果说牛顿物理还可利用，那是作为一种在其应用领域中引人注目地精确、而缺乏内在合理性的唯象理论.

人们期望，这种并非独一无二的解释，在人们深信已掌握宇宙的钥匙这点上，会有意想不到的成功. 牛顿本人从引力定律出发，证明了开普勒三大定律，并且通过太阳和月亮的吸引来解释

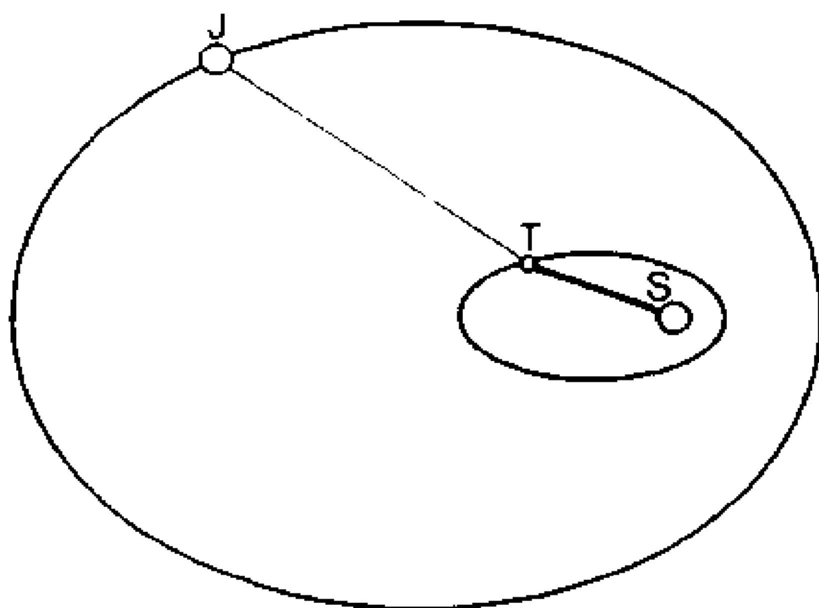


图 10 天体力学：行星 T 不仅受到太阳 S 的吸引，也受到大行星 J 的吸引. 它的轨线将偏离参照的开普勒轨道.

---

① Charles de Coulomb(1736—1806)，法国物理学家. ——译者注

② Micheal Faraday(1791—1867)，英国物理学家. ——译者注

③ James Clerk Maxwell(1831—1879)，英国物理学家. ——译者注

潮汐和岁差.他就这样创立了一门新学科：天体力学;这门学科被一些最伟大的数学家：欧拉①、拉格朗日②、拉普拉斯、庞加莱、西格尔③.一直应用到今日;他们惊人的成就在一个多世纪以来,成为整个科学发展的范例和启示.

令人好奇的是,人们在天体力学中所证明的第一件事却是[28]开普勒三大定律是错误的;更确切地说,它们只是一些近似.每颗行星由于太阳的吸引,稳定在它的开普勒轨道上,但又由于其他的行星(主要是最大的木星)的吸引,而偏离这条轨道.幸而这些偏离在计算上是可接受的.天文学家们很快就发展了以给定的精度预测一颗行星在给定的日子的位置的数学方法.这就是所谓摄动计算,它记载于两个文献：拉普拉斯的《天体力学》和庞加莱的《天体力学的新方法》.为了对所达到的精度有一个观[29]念,比如,我们可以在几个月以前算出在数千米的误差范围内的水星位置.不要忘记阿波罗的登月使命和空间探测器,没有摄动计算,它们都是不可能导航的.

如果说这些方法可用来由行星今天的位置和速度导出行星未来的位置,那么它们也可用来追溯我们希望知道的过去的某日的行星的情况.换句话说,太阳系的过去和未来完全记录于它的现在.为了知道宇宙在某个过去或将来的日子(数学上对此不加区分)的状态,只需以一定的精度知道它的现在状态,以及掌握一定的计算能力.

这样一来,时间被蒸发了;它完全被禁锢在当前的瞬间内,那分隔已不存在的过去和尚未到达的将来的区间消失了.过去与现在是等价的,因为它们全都包含在现在中;于是人们追逐时间流向时,向前与向后一样容易,就像人们在冰冻的河面上逆流

① Leonhard Euler(1707—1783),瑞士数学家.——译者注

② Louis Lagrange(1736—1813),法国数学家.——译者注

③ Carl Ludwig Siegel(1896—1981),德国数学家.——译者注

而上与顺流而下一样容易.但是,这一未必可信的宇宙正是牛顿物理的宇宙,而19世纪的学者们深信,通过他们的计算,它们接触时间的起点,就像接触时间的终点.经过一定的计算以后,他们坚信一切都将知晓,其中包括人类的未来和真正的科学的未来.

比如,这里是拉普拉斯对未来的天文学家们所指派的任务:编纂所有的星星和星云,它们的运动和亮度,以及人们将对其觉察到的变化;在太阳系中发现新的物体,主要是彗星,并确定其轨道.几代天文学家将是如此穷极无聊,他们命中注定只能苟食盛宴的残羹剩饭."因为只有唯一的宇宙有待阐述,[30]任何人都不能再做凡人中最幸运的牛顿已经做过的事①."人们甚至毫不犹豫地去分析未来的天文学发展的原由,断然声称它们"取决于三件事:时间的测量,角度的测量以及光学仪器的完善",拉普拉斯说,不幸的是,前两件事几乎是无所作为的,于是一切都只能把我们的希望寄托在第三件事上.人们从未想过光谱望远镜,射电望远镜;黑洞、类星体、扩张中的宇宙更是不可思议的.

然而,19世纪正是在这个一切都事先知晓的禁锢的宇宙中过去了.正是在这样的气氛中发展了巨人世纪的哲学,和诞生了众多至今仍然困扰我们的政治、经济和社会学说.正是在这样的时代,人们最终习惯于不理解地去阐述:万有引力提供了数学模型,它借助于步履艰难、深奥莫测的计算,使某些专家能精确地预测任何天文形势,尽管谁都不能说出什么是引力,谁也不能解释引力怎样在一瞬间跨越浩瀚的真空而作用.正是从这时起,出现了科学思想与自然思想、定量与定性的分野.

新学说曾经是不可抗拒的.它以不可争辩的实践有效来补充其哲学弱点.其布道者们的虔诚被新的成功不断地激发.比[31]

① 出自拉格朗日,由库阿瑞(Koyré)摘引.——原注

如，我们回顾一下海王星的发现．天王星运动的不规则曾经被归因于存在一颗尚未发现的外行星，勒维叶[①]在巴黎，亚当斯[②]在剑桥，他们相互独立地潜心于为未知行星定位的必要计算多年；1846 年 9 月，勒维叶写信给他在柏林的同行之一，让它观察天空中的某个区域．海王星应约赴会．一位天文学家就这样埋头于它的计算而发现了一颗新行星．

引起的反响铺天盖地．但当勒维叶再把他的方法用于水星的不规则运动，而“发现”一颗当然地被命名为“硫星[③]”的新行星时，后者却固执地拒绝出现；这又多少使方法逊色．而当 1930 年 1 月，冥王星又在几乎与海王星同样的情况下发现．但有一天，我在报上读到，冥王星的质量还不足解释在海王星轨道上所观察到的摄动，天文学家们怀疑，冥王星外还有一颗行星或退化的恒星存在．

今天仍然回荡着 19 世纪天文学家的呼声：“给我一张纸和一支笔，我要重现宇宙！”

经典决定论

这些雄心壮志很快就找到了一本法典，它引导科学思维——直到今天．从《原理》的极为罕见的第一版起，牛顿就陈述了两条 [32] 法则：

1）除了既真实又足以解释自然现象的原因外，我们不应接受更多的自然事物的原因，因为自然是简单的，不奢求冗余的原因．

2）这就是为什么同样类型的自然结果的原因是一样的．

---

① Urbain Le Verrier(1811—1877)，法国天文学家．——译者注

② John Couch Adams(1819—1892)，英国天文学家．——译者注

③ 原文为 Vulcain．水星的原文为 Mercure，其原意为汞；Vulcain 意为火山岩、硫化物．——译者注

所有这一切在稍后将大为完善,以形成经典决定论,但人们已经承认,从因到果的线性血缘关系,它用于物理科学是如此合适,而用于生物学和人文科学是如此格格不入.所有明天产生的结果都有其今天的某种原因,而对原因的足够精确的了解就可用来预测结果.统计力学的发展几乎毫不动摇这一世界观.偶然并不是没有原因,而是大量小原因叠加的结果.这样,人们寄希望于将来,有朝一日将有一种更为深入的分析和一种更强有力的计算方法,可揭露隐藏在表面上是随机的现象背后的决定论;这是毫无疑问的,正如爱因斯坦①所言,上帝不玩骰子.人们期望,概率论和统计方法允许人们更为体面地摆脱困境.

然而,完善而有成效的经典工具是微分方程.这是表述决定论的数学语言.如果一个系统受一个微分方程所操纵,那么其演变就完全记录在它的当前状态中:对当前状态的完全的知识可用来复原其过去,预测其未来.

一个微分方程是运动物体的位置、速度与加速度之间的一种在每一时刻有效的瞬时关系.对这个方程求积或求解,就推导 [33] 出运动物体的轨线以及它在轨线上的位移.

为了理解这一概念,第一种方法是几何的、甚至是文学的,它不太完全地表达在图 11 中.这使人想起普朗歇②在其开始为达尔塔尼昂效劳的光辉生涯时的经验;当时达尔塔尼昂正在物色一个仆人,与他相逢于图尔内尔桥;而他正在那里向水中吐口水,激起一串圆圈.波尔多断定这种举动是心领神会、善解人意的证据,而达尔塔尼昂也就不需其他的推荐而雇佣了他.

---

① Albert Einstein(1870—1955),美籍德国物理学家.——译者注

② Planchet,19 世纪法国作家大仲马(Alexandre Dumas,1802—1870)的名著《三个火枪手》中的人物,他是下面提到的达尔塔尼昂(d'Artagnan)的仆人.下面提到的波尔多(Porthos)也是书中的人物.——译者注



图 11　牛顿方程. 质量分别为 m 和 m' 的运动物体 M 和 M' 在被观察的时刻分别以速度 v 和 v' 运动. 如果它们互相不吸引,那么它们将沿着虚线作直线运动,根据牛顿定律,它们互相吸引,并且互相作用于对方的力 F 是一样的. 但是这同样的力表现为不同的加速度 $\gamma=\frac{F}{m}$ 和 $\gamma'=\frac{F}{m'}$. 假设 $m'>m$,则有 $\gamma'<\gamma$,并且质量为 M' 的物体的轨线的向内弯曲程度要比质量为 M 的物体要小.

事实上从桥上看水圈是颇有魅力的,尤其是水圈在不断起[34]伏,而水流把这种起伏隐藏在不动的流线之下. 当人们向水面抛一件什么东西时,人们要费多少心思才能发现这种隐藏的运动! 人们甚至可以做一些科学实验,依次在同一个地方放下两叶小舟,并观察到它们恰好有同样的轨线. 微分方程就是在每一点上的水流的方向和力,而微分方程的解就是抛到水流中的物体的轨线.

对于不太有诗意的思维来说,比如计算机,它们有它们的语言来表达;余下的只是计算. 比如,我们考虑在一条直线上移动的一个运动物体,它在每一时刻的速度 v 与它离固定的原点的距离 x 成反比,比如 $v=\frac{1}{x}$,使得它离原点越来越远. 这里我们就有了一个非常漂亮的微分方程,它是一维的,而前面遇到的是二维的;由此直接可提出一系列问题,诸如运动物体能否无限远离或停滞在某个距离上等等.

计算机看不到那么远,它将运作如下. 它先问初始时刻 $t=$

0的位置. 我们提供给它的是 $x=2$. 该时刻的速度因而是 $v=\frac{1}{2}$. 计算机认为这个速度在时刻 $t=0$ 和 $t=1$ 之间是不变的(这无非是一种近似), 而给出路程为$\frac{1}{2}$, 以及 $x_1=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$为新位置. 在时刻 $t=1$ 的新速度则是$\frac{2}{5}$, 在 $t=1$ 和 $t=2$ 之间的路程将是$\frac{2}{5}$, 而新位置为 $x_2=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=2.9$. 这样我们就可近似计算运动物体在时刻 $t=0,1,2,3,\cdots$的位置.

如果步长取为0.1或0.01来取代1, 我们就得到更好的近似. 在时刻 t 的精确解为$\sqrt{2(t+2)}$①, 从而在时刻1应为2.5, [35]

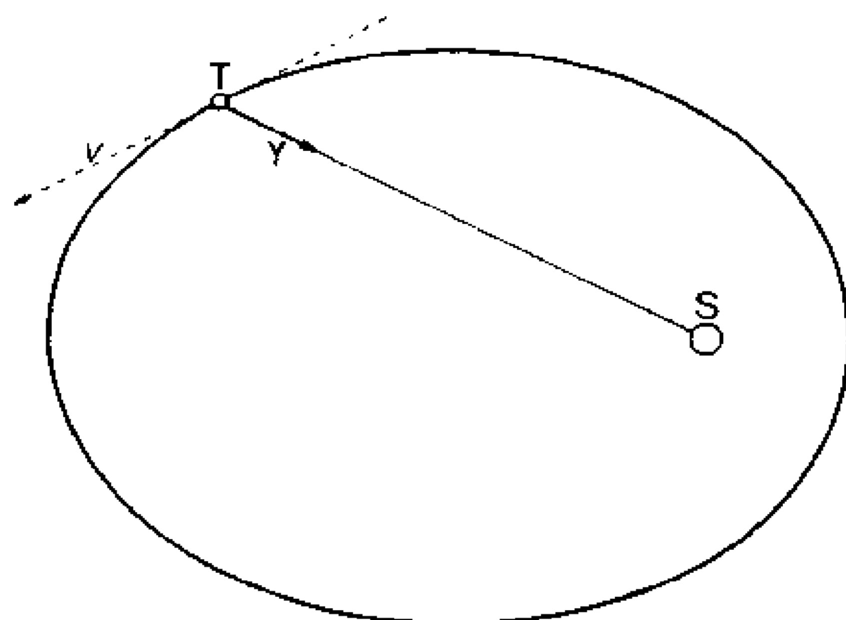


图 12 牛顿方程的积分: 太阳的质量是如此庞大, 使得它真正的引力运动可以忽略. 它被看作是不动的物体, 而行星在它的引力影响下运动. 在每一时刻, 行星有一种沿直线逃逸的倾向, 但其轨线是向内弯曲的, 其运动根据牛顿定律加速. 这两种运动的合成使得实际轨线是椭圆, 而太阳位于该椭圆的焦点之一.

① 原文作 $t\sqrt{2}$, 有误. ——译者注

而不是 2.9. 重要的是要把握这样的思想：位置与速度之间的瞬时关系使得它们互相完全确定，只要人们知道初始时刻 $t=0$ 的位置.

再次可作为原型的又是开普勒问题：描述行星环绕太阳的 [36] 运动. 如果我们引进引力，并且已知牛顿动力学的基本关系，力 = 质量 × 加速度，那么该问题就带来一个微分方程. 其积分精确地给出开普勒椭圆和面积定律.

这正是牛顿在《原理》中所做的. 为了达到这点，它需要建立一个新的学科：数学分析，以利于陈述和求解微分方程. 技巧和观念上的困难曾经叹为观止. 怎样定义瞬时速度？根据定义，一个瞬时不会延续，从而一个运动物体在这个瞬时不会有时间来移动：那么什么是一个运动物体在一给定瞬间的速度？怎样从

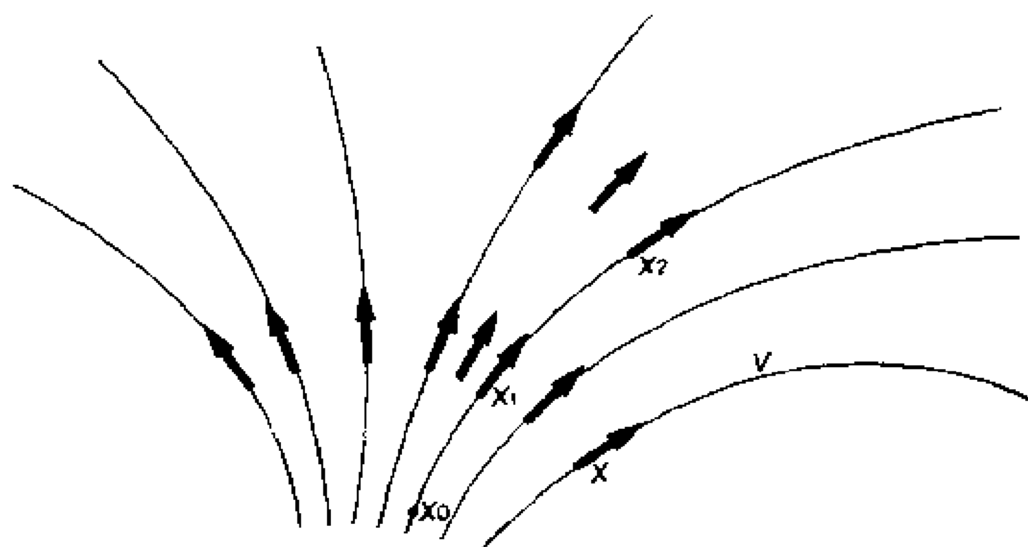


图 13 一阶微分方程是运动物体的位置 x 及其速度 v 之间的瞬时关系. 如果已知初始位置 x_0，那么我们可推出时刻 1 的位置 x_1，时刻 2 的位置 x_2，如此等等，运动被完全确定. 由此得到一条所谓积分曲线. 这样，当人们从桥上看水流时，可以想象水面上布满了指示水流方向的大量小箭头. 如果一个微粒落入水中，这些箭头在一条轨线上为它指明方向，这条轨线将是一条流线. 箭头代表微分方程(在水面的每一点上有一个箭头)，流线就是积分曲线.

一个瞬时关系出发来得到整体的解？所有这一切构成微积分学，其入门教材如今已教给16岁的孩子们.稍后，他们将学到，一个微分方程的解完全由它的初始状态来确定.这样，在数学定理的形式下，人们向他们反复灌输过去与未来都完全记录在当前瞬间的轮廓中.

此后，所有应用微分方程的人(没有其他工具为时间建模)都设想永恒被禁锢在当前瞬间内.把一个物理系统用一个微分方程来表达的研究者，只要他能以足够的精度观察系统的目前状态，他就可在他的纸上得到该系统的整个演变过程.

更妙的是，有了第一个最伟大的例子——开普勒问题的牛顿解以后，人们期待发现简单而有规则的运动，或者不管怎么说，是与此相近的运动.这种信念容易在开普勒定律被作为首要 [37] 的真理来介绍的精神中建立，并且将通过教育和实验得到肯定.教育就是继承传统；即使是数学也是如此：人们只介绍那些人们会做的，那些理解透彻的和极为有用的；而悄悄地摆脱那些模糊不清的要点和令人困惑的事实.一个微分方程完全由它的初始条件来确定(即过去与未来每一时刻的位置和速度只依赖于 [38] 其初始时刻的位置和速度)的事实是在数学上完全确立的.人们从不提起其含义的批判分析：它是否必然导致有序运动，或者与混沌性态不相容？相反，人们不断成倍增加从各种不同态势下引出的例子，其中用各自的术语的演算，有效地指出一种整体有规则的性态，并且还通过一些不动点和周期轨线来强调.年青的研究者要想显露头角，只需考虑向他的同行们提交一个具有人们所期待的有规律的性质的模型.一旦做成，他就为范例宝库添砖加瓦，为流行学说加重分量.

在科学研究的领域中就像其他领域一样，众多的是工匠，罕见的是创新者，那些真有才干来打破陈规陋习、走出因循守旧末路的人.试图判断一个问题是否有意义真是太容易了：有意义是因为四分之三的同行们都在做这个问题.于是真正深刻而困

难的问题就很不容易成功,不能吸引那些论文发表专业户.庞加莱把问题区分为问题自身提出的问题和人们提出的问题.正是庞加莱,才会去批判经典决定论,并且开辟了新纪元.他曾用他的分析摧毁的并非是牛顿殿堂的外围设施,而是它的最不可一[39]世的堡垒,天体力学.

第2章 破裂的水晶

不可能的计算

19世纪就这样看到了天体力学和此后被冠以决定论的世界观的颇为壮观的胜利.拉朗德[1]和勒维叶的名字被列入象征民族光荣的先贤祠内.天文发现分隔了民族.已经有了牛顿和哈雷[2]的英国人不是在以某个亚当斯领先的名义向勒维叶寻衅?带眼镜的学者们足不出户、目不离经书,就能发现新世界,该是多么异想天开,多么难以置信!克利斯多夫·哥伦布[3]与三条帆船驶上航途,还不知是否将一去不复返;而当他们踏入美洲大陆,还以为是到了印度.总而言之,那是一次瞎碰上的发现;而我们的天文学家的发现是胸有成竹、早有预期、按部就班、一"算"而就的.

计算是如此有魔力.人们以为,飘逸的学者无忧无虑地神奇创作,是因为余弦老师或张角教授一旦埋头于计算,就能如有神助、随心所欲.因为我们谁都会计算,并且比我们当年当好学生 [41] 时算得还好.我们既非拉朗德,也非勒维叶,但是我们手中有他

① Joseph-Jérôme Lefrançais de Lalande(1732—1742),法国天文学家.——译者注

② Edmond Halley(1656—1742),英国天文学家.——译者注

③ Christopher Columbus(1451 1506),意大利航海家,美洲大陆发现者.——译者注

们驾轻就熟的计算工具,有谁会知道,也许是因为缺点恒心,使我们没有像他们一样运用自如?这样,科学的荣誉看来像是对成年人的优异奖励,对好学生的最高奖赏.即使不能得到殊荣的人,仍然可加入到唐璜和霍梅先生①的不朽的呐喊中:“我深信,2加2等于4,而4加4等于8.”

可悲的是,果实中已经长虫,归功于牛顿的雄伟殿堂的柱子已经断裂;而这些从一开始就出现的柱子,最终将导致整个建筑倒塌.啊!它曾经是远在天边,模糊不清,需要凑近去仔细辨认.但人们还是能发现它们,甚至还在设法补救.艺术家偏爱装潢门面、粉饰太平,旅游者则只见辉煌.人们从未想过,当殿堂毁于尘埃时是什么情景.

然而,他们应该料想到!看来有人对他们隐瞒了什么东西.首先是计算,那著名的计算是如此之长,长得似乎超过单个个人的能力所及,以至无法验算.拉朗德在1757年6月开始他的计算,而在1758年11月宣布他的结果.为发现海王星,亚当斯算了两年,勒维叶算了一年.很明显,谁也不会花一两年时间去找他们的计算漏洞.更糟的是,这些计算长得叫人不敢相信、很可能是错的.哈雷彗星出现在天空中比克雷罗②和拉朗德所宣布[42]的日子早一个月.一个月的偏差,相对于75年(彗星的开普勒周期),或者更确切地说是相对于618天(计算所涉及的摄动),不算很大.但是这仍然是计算能力的一个限制.亚当斯和勒维叶对海王星宣布了两条不同的轨道;其中勒维叶的较好(幸哉),但也非真正的好.他算出平均距离是地球轨道半径的35到38倍,周

① 唐璜(don Juan)是欧洲传说中的人物,曾经在许多著名文艺作品(例如莫扎特的歌剧)中出现.霍梅(Homais)是19世纪法国作家福楼拜的小说《情感教育》中的人物.——译者注

② Alexis Clairaut(1713—1765),法国数学家和天文学家.——译者注

期是 207 年到 233 年之间，而真正的值是 30 倍和 164 年. 人们甚至可注意到，如果勒维叶早 40 年或晚 40 年(海王星年的四分之一)去计算，错误的思路所造成的偏差将使他实际上不可能再发现海王星. 正如《大众天文学》(1955 年版)含蓄地说:“这些严重的不一致引起了思维上的困扰.”

人们早已把公众带入真正的信念. 为了不丑化它，人们向公众隐瞒了最糟的事实. 比如，亚当斯和勒维叶是怎样开始他们的计算的? 他们绝对需要知道摄动行星的质量. 对此，他们干脆就跟着感觉走，作猜测，就像一个差学生不会做他的习题一样. 这就使得他们的答案是如此糟糕:亚当斯把海王星的质量取作地球质量的 45 倍，勒维叶则取 32 倍，而实际值是 17 倍. 他们神奇的计算最终无非是外衣，人们甚至可以说是一种装饰，一种原始的打赌，这如同从屋顶开始盖房子，不幸的是科学界对此已司空见惯.

我只能这样来为我的上一世纪的卓越的同行辩解，这些数学家和天文学家可能曾考虑过为什么摄动计算如此艰难、其结果是如此不确定的深层原因，但他们更多地是要不分青红皂白 [43] 地传播引力定律和诸如此类的定律能解释和预测一切的思想. 这种可能性纯属子虚乌有:为使理论回到实践，它需要把其对应的计算做得尽善尽美.

摄动计算并不很困难. 比如，我们需要计算地球的实际轨道，先利用开普勒轨道作为一级近似. 如果这对于所研究的问题还不够精确，我们考虑最大的行星木星的引力. 它对开普勒运动所带来的摄动的计算可在两个方面进行简化:

——忽略地球对木星的反作用;即在考虑木星的开普勒轨道时，不计地球引力所造成的摄动;

——由定义，对运动所带来的摄动很小，这就允许在参照开普勒轨道的附近通过对方程的线性化来计算摄动，就像人们在曲线的一点附近用这点上的切线来代替曲线一样.

然而,这些计算人们还真不知道怎样来做.我们已经说过19世纪的光辉成就.计算机的出现使状况大为改善,因为远比拉朗德和勒维叶的计算复杂的一项很长的计算,现在只需几小时.但是这并未使它发生根本变化:预测还是只在一定的精度范围内有效,尽管精度已被大大改进,但令人惊讶地在原地踏步.[44]计算工作仍然步履维艰.比如,阿波罗登月计划曾要求极为可观的计算能力和制定十分精细的数值方法,为此必须广泛动用两个世纪以来所积累的天体力学知识.所有这一切都只是为了计算在地球和月球之间的一块细小空间区域中的一个飞行器的轨线.即使如此,轨线还曾被不断校正.

为了忍受天体力学的无能为力,真是需要努力来习以为常.自牛顿时代以来,最基本的问题仍然没有答案.什么是地球的轨线?它是否会逐渐接近太阳来结束其历程?或者相反地慢慢远离太阳而消失在星际?对此谁都一无所知.开普勒轨道不过是一种近似,它足以给出几年光景的轨线图景.由大行星所造成的摄动的计算把这一有效范围推移到几世纪或几千年.这对于人类的时间尺度来说已经够长.人们就此可以推断上古时代观察到的日、月食的日子.但是对于天文尺度来说,这就微不足道了.太阳系的过去和将来都完全逃离我们的视野.

还有别的没有答案的问题:土星环的细微结构来自何处?它们是被一些昏暗的间隙所隔开的亮度不一的平面环,其中最重要的是卡西尼①环.很久以来,人们就知道它们并不连成一体,而是由一群相互独立的一起围着土星转的重微粒所组成.人们也知道,引力不是它们所受到的唯一的力,微粒之间的(非弹性)碰撞起着重要作用,特别是对于环的压扁.但是为什么有这[45]些间隙?

① Jean Dominique Cassini(1625—1712),意大利裔法国天文学家.——译者注



（照片）1981年8月17日距土星890万千米处由旅行者2号拍摄的土星环照片．在这张图象中，人们可以区分出十多个明暗相间、构造多变的环．（PPP/IPS搜集） [46]

关于上述现象的成因有很大争议.极大部分专家同意这些间隙是由土星的一些大卫星的摄动所引起的,但在这些摄动所产生的现象的方式上意见分歧.一些人看到了谐振,而另一些人则没有看到;有人认为可以忽略,有人则不以为然,如此等等.当然,人们为此已送探测器去看.旅行者1号和旅行者2号给我们显示,不仅是三个,而是有几百个嵌套的环,有些甚至交织在一起,一直到著名的卡西尼环,就像凯旋门前的星星广场的车水马龙的景象.在那里人们发现直径为几千米的小月亮和几厘米大小的小石块,以至谁都不知道是怎么回事.

幸而,我们总还可以计算,这种计算曾经家喻户晓;如果我们的天文学家算不出的话,我们还有耗资巨大、光彩夺目的计算机.人们只需把小微粒重新均匀地放在土星周围的平面上,把那些大卫星适当安排,把一切都输入到计算机中,使其运转.可以肯定,人们将看到土星环逐渐形成,细微结构从中呈现.人们甚至可以拍一部惊天动地、老少皆宜的科教电影.

可惜,一切令人失望.那些从事这一行当的有志之士在尚未观察到少许环形以前,已经被计算费用耗尽了他们的预算.为了解释这一失败.人们归因于必须有久远的时间才能得到显而易[47]见的结果,因为天文时间尺度太大了.这是将力不从心的责任推给了自然界.这是承认天体力学计算的无能.但这并非是这些计算如此艰难的深层原因.

庞加莱的著作

在庞加莱的大量著作中,天体力学处于显要的位置.甚至这为他带来莫大的荣誉,因为他1889年发表的专题论文《论三体问题与动力学方程》荣获瑞典国王奥斯卡二世特别创立的大奖.诺贝尔奖当时尚不存在,因而这一事件轰动一时.发表于1892年到1899年的三卷集《天体力学的新方法》成为人们始终引用、却很少阅读的必备参考文献的一部分.

应该说,天体力学是一块用来展示庞加莱的数学武库而精心选择的战场,这个武库是庞加莱为了进攻另一些诸如曲面几何学或微分方程分类之类的重要据点而建造的.庞加莱是一位无可比拟的精于计算者,他以一种一般的方式着手他的计算,并把它推到他力所能及的地步.一旦达到计算的界限,他就以批判的眼光来回顾他的计算历程,然后试图透视在他面前弥漫的迷雾.道路消失在沙漠或荆棘之中.他既看不见里程碑,也看不见路标,但他辨清了迷雾笼罩的大地上的大量意外事故.

于是在这认识的界限上需要变动视线.在精确但局限的定 [48] 量方法上人们试图补充一些定性方法,它们能使人看得更远,但给出不太清晰的图景.庞加莱的历史地位在于他是一位定量方法的一代宗师和定性方法的开山鼻祖.因而他是定量方法最深刻的批判者和定性方法最伟大的先驱者.甚至他的伟大著作的标题不也意味深长? 如果有了新方法,谁还会关注老方法?

庞加莱的批判(他本人似乎并不想走得那么远)针对这样的思想:一种看来精确无比的定量模型能预料未来.这是根深蒂固的决定论者的基本信条,因而人们可以理解,在庞加莱的时代,他不愿从他的批判中推出所有的结论.

这样他谨慎地把他的批判封闭在天体力学的特殊领域中,并用技术语言来掩盖.他乐于指出动力学方程不是完全可积的,而用来近似求解它的级数是发散的.

为了弄明白这意味着什么,需要试问比如三体问题的完全解是什么意思.给定三个质点,其初始位置和速度都已知,根据牛顿定律它们相互吸引,这就涉及计算它们在未来或过去的某一时刻的位置.人们希望有一个依赖于时间 t 和初始条件的数学公式;所求的构形应该对于给定的变量 t 导出我们感兴趣的值.这就像公式 $x = \sin t$ 作为 t 的函数完全确定 x;如果我一时 [49] 心血来潮想计算 10 的正弦值,我就掏出我的计算器,打入 10,再按 sin 键,我就看到跳出 0.54402111.这就是我们想要的这种

记为 $x=f(t)$ 类型的依赖性;不过为了刻画空间中的三个点的位置,需要九个数,而不是一个数.三体问题的完全解于是将由九个关系式 $x_1=f_1(t), x_2=f_2(t), \cdots, x_9=f_9(t)$ 所组成,它们可用来通过简单的代入,算出每个时刻的位置.

庞加莱证明的正是这样的解不存在.毫无疑问,我们既不否认在时间与构形之间有一个关系,也不否认这个关系完全确定今后的位移.退一步来说,如果我们能完全一样地重现初始条件,那么人们将看到完全一样的运动;即在同样的时刻有同样的构形.问题在于对于我们这些芸芸众生来说,把握这些关系,并从中通过可计算以至可利用的项来阐释它们的有效的可能性.当然,我们能够走几步,甚至我们有时还能在这个方向走得相当远,但是我们不能走到底.天体力学的牛顿模型对我们来说始终包含一条若明若暗的真理.

所谓三体问题没有完全解是指没有对时间 t 的所有值都能有效计算的解.这对于所有那些善于摆弄中学里的函数、熟记 $t^2, \frac{1}{t}, \sin t, \cos t, e^t$ 之类的所谓常用函数的人来说,似乎不可思议;因为人们清楚地知道它们对于大 t 值的性态,并且一旦需要总能算出它们对于任意大的 t 的值.不幸的是常用函数的清单太短,它们就是列在袖珍科学计算器上的那些:有理分式、三角函数、指数函数,当然,还有它们的组合.对于学者们来说,还有所谓超几何函数.但这确实就是全部.

[50]

庞加莱的第一个结果刚好就是在三体问题中时间和位置之间的关系不能用常用函数来表达.这第一个否定结果还不是决定性的.因为这些常用函数没有任何神秘之处,人们有简单有效的方法来计算它们的值.它们就是著名的公式:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \cdots,$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + \cdots.$$

右端的无限和称为级数.人们说它是收敛的是指它可以用其前面几项来有效计算,而这正是在袖珍计算器中所用的处理方法.于是人们设想把问题简化:不去用常用函数来表达九个关系式 $x = f(t)$,而只需在与上述类似的级数形式下直接得到它们,即:

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots,$$

其中依次的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$,为满足三体问题方程,可使其越来越接近地确定.

庞加莱的第二个结果则是这种方式得到的级数是发散的; [51] 这就是说,右端的无限和无限增加,从而人们不能用它来决定和计算三体问题的解.

对于在一个不太长的时间中执行有效的摄动计算,这种处理方法尚不失某种价值.它已经引起并继续引起无穷无尽的工作,而庞加莱本人对此也有很多贡献.根据他自己的说法,所得到的级数发散性"在目前并不太重要,因为人们可以从前几项的计算中得到非常满意的近似而心安理得;但是以为这些级数在给出无限近似时也听之任之,那就不太合适了.它们不够用的时刻终将会到来.此外,人们企图由这些级数的形式而推出的某些理论推论,由于级数的发散性,不再合乎情理.这也就是为什么它们不能用来解决太阳系的稳定性问题."

这样,庞加莱在最严格、最不可一世的数学模型——牛顿宇宙的腹地中指认了一块不可分割的领域为不可计算的.世上总有一些事件是出乎意料的,其中有一些甚至有严重的后果,诸如太阳系的未来演化.但计算停滞时,数学仍在继续.数量上的极限并非是数学的极限;通过新方法,定性的而非定量的,人们较少地去寻求所有状况下的精确的预测,而更多地去寻求一种可能的一般观念.

在回到上述问题以前,我们再来看一下庞加莱著作中的批判观点.在我们刚光顾过的第一卷中,他指出某些物理事件是不

[52] 可计算的，从而是不可预测的．在第二卷中，他还进一步指出，某些通过数学模型预测的事件，在物理现实中将不会产生！

一个简单的(假想)实验会使我们看到这一点．设想有一个密封的盒子，被隔板分隔为两个小室．其中一个是真空，另一个充满气体．我们在隔板上钻一小孔：气体立即就从一个小室逃逸到另一个小室，一直到两个小室间气压平衡为止；而从这个时刻开始，不再发生任何事情．显然，任何目睹气体又自发地从一个小室回到原来的小室的人都一定会以为遇到奇迹．这种物理状况有一个普遍接受的数学模型．人们把气体看作大量像小球那样相互碰撞的分子的集合．这使得系统就可由每一个分子的位置和速度来描述．一个著名的结果，即庞加莱回归定理，用于这种状况将指出，系统将回到其初始构形的直接相邻状态．说得更形象些，就是它会如此周而复始甚至无限多次．

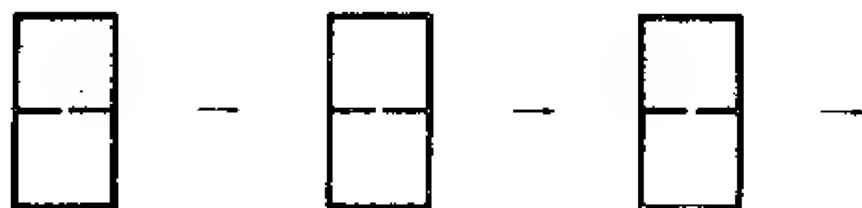


图 14　永恒的运动．根据庞加莱定理，在上一小室中的气体一旦释放，会无限次地回到其原来的地方去．

[53]

模型预言，第一个小室中充满气体后，气体会完全出空到第二个小室中去，然后又重新充满，依此类推，无限重复．一个如此违背物理实验的现象只能看作是个悖论．悖论的解决在于完成一个循环所需要的时间．连续两次充满之间的时间间隔是可以计算的，它大大大于太阳系的年龄，这就说明要观察到所预言的循环是极为困难的．

这样，数学为我们提供了一项为瘪轮胎充气的原始方法：只需等它自发地膨胀．可以想象，庞加莱对一种用来替代自行车打

气筒的原始方法申请专利：为使车胎恢复原状，只需抬起车轮，甩手等待，空气从哪个窟窿漏掉还会从哪个窟窿回来.同样的思路还可使人不再为在咖啡中多加了糖而操心.对付这样的小事故，只需耐心等待，多放的溶化了的糖会再次凝结，以便把它们捞出来.这都是因为数学理论预言，糖的凝结与溶化，车胎的漏气与充气都会无限反复.

不要以为这个实验只不过是一个有趣的悖论.它补全了庞加莱的批判，而向我们指出，一方面是精确的模型不能预言，另一方面是能预言的模型在某种程度上是不可能的.这就为一种新类型的模型开辟了道路，它将展示有广阔前景的各种可能性，而不能宣告那一种可能性必然降临世间.在这种定性模型与传统定量模型之间，有一种像草稿和最终计算之间那样的全部差别.

正是庞加莱在微分方程中引进了定性理论.在更为特殊的[54]天体力学领域(他称为动力学方程)中，他通过分析某些特殊轨线以及这些轨线邻近的状况，明确引入运动的整体复杂性.这样他就发现了一种绝对意想不到的复杂状况，并指出动力学方程可以包含极为不规则的运动，这种状况与其说是有规律，不如说是例外.在开普勒近似的宏观的表面规律性下，庞加莱展示了大量的微观意外，就像对我们来说处于静止的微粒在显微镜下表现出布朗①运动来一样.

这里需注意的是，被庞加莱选作在其邻近能够尝试他的分析的参照轨线，最为经常的是周期轨线.这是一种经过一段或短或长的称为周期的时间 T 以后，在其上自我封闭的轨线.换句话说，一条轨线是 T 周期的是指描出轨线的运动物体经过一段时间间隔 T 以后，它恰好就回到原处.例如，地球的轨道是周期轨道，其开普勒近似的周期是一年，但是如果人们考虑到对它的行星摄动，它大概就不再是周期轨道(对此人们一无所知，即使

① Robert Brown(1773—1858)，苏格兰生物学家.——译者注

它是周期轨道,其周期也非常长).

庞加莱用他的今天学术界已不再袭用的语言宣称,"这些周期解对我们来说之所以如此宝贵,是因为它简直可以说是使我们能够潜入那块至今还是不可逾越的领地的唯一突破口."它们事实上有两大优点:人们知道怎样来描述它们周围的状况,以及[55]怎样计算它们.我愿意特别强调这第二点,因为它使我们又回到先前的忧虑:怎样明确地给出关系式 $x=f(t)$,使它对所有时刻 t 都有效,即使 t 非常大.如果已知 f 是 T 周期的,那么只需给出时刻 0 和 T 之间的关系式,即一个有限区间上的关系式.由此容易推出对于其他时间值的关系式.这就像在我的计算器上,如果我先打入 1000,然后再按正弦键,那么我看到字母 E——错误;但是如果我真希望知道 1000 的正弦值,那么我只需把 1000 除以周期 2π,再取余数的正弦,就得到 0.82687954.这样,三体问题的周期解原则上是可接受计算的.尽管如此,即使我们知道所有的周期解,离问题的解决还很遥远,我们并不能由此推出三体问题的一个完全解,因为它尚有许多其他的非周期解.

为便于描述参照周期轨线邻近的状况,我们作如下处理.设所选取的周期轨线 T 为三维空间中的一条闭曲线.我们用一个垂直平面 π 把它截断,并与 T 相交于某个点 O(交点是一个还是多个无关紧要).现在如果 T' 是 T 邻近的一条轨线,则它与 π 在 O 的附近交于点 $A_0,A_1,A_2,\cdots$.这些点将构成一个无限序列,除非 T' 本身也是一条周期轨线.其思路是用轨线 T' 的与平面 π 相关的这些点的序列来取代 T'.这样,就把问题归结为二维情形,使得人们容易用图象来描述它.

换句话说,人们可以想象,平面 π 是一张纸,点 O 是 π 与参[56]照周期轨线的交点.如果现在在平面上取另一个点 A_0,那么在空间中由 A_0 出发的轨线将重新在 O 的邻近穿过 π,这样就定义了新的平面上的点 A_1.这同一条轨线于 A_1 之后继续它的历程,将再次在 O 点附近穿过 π,又定义了新的点 A_2.这就形成将

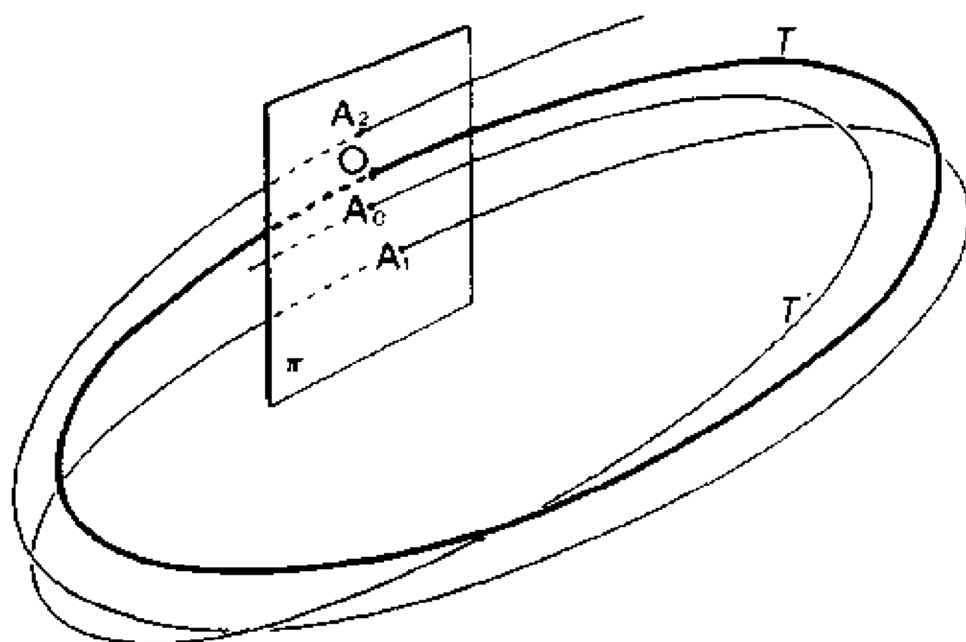


图 15 一条周期轨线 T 邻近的状况.

在纸上表示的落点序列 $A_0, A_1, A_2, \cdots$，它可以用来使空间中的由 A_0 出发的轨线可视化. 比如，$A_0 = A_n$，即第 n 个点与出发点重合，那么，这就是说，对应的轨线是周期的：它环绕 n 圈后回到原处，而参照轨线只环绕一圈.

采用现代手段、利用微型计算机和绘图仪，做这样的工作轻而易举. 读者可不妨自行试一下，在坐标(x, y)平面上以下列方 [57] 式定义变换 $A_n \to A_{n+1}$：

$$x_{n+1} = x_n \cos\alpha - (y_n - x_n^2)\sin\alpha,$$

$$y_{n+1} = x_n \sin\alpha + (y_n - x_n^2)\cos\alpha,$$

其中角 α 是一个任意确定的参数. 这个简单而著名的例子(海农(Hénon)，1969)的方便之处在于不必计算空间中介于 A_n 和 A_{n+1}之间的那部分轨线. 或者不如说，这一计算已经完成，其结果已表达在海农公式之中.

这里显示的图形是表示为点 O 的周期轨线附近的一种典型状况. 它们是通过在海农公式中取 $\alpha = 76.11°$，并不断变动起点而描出的.

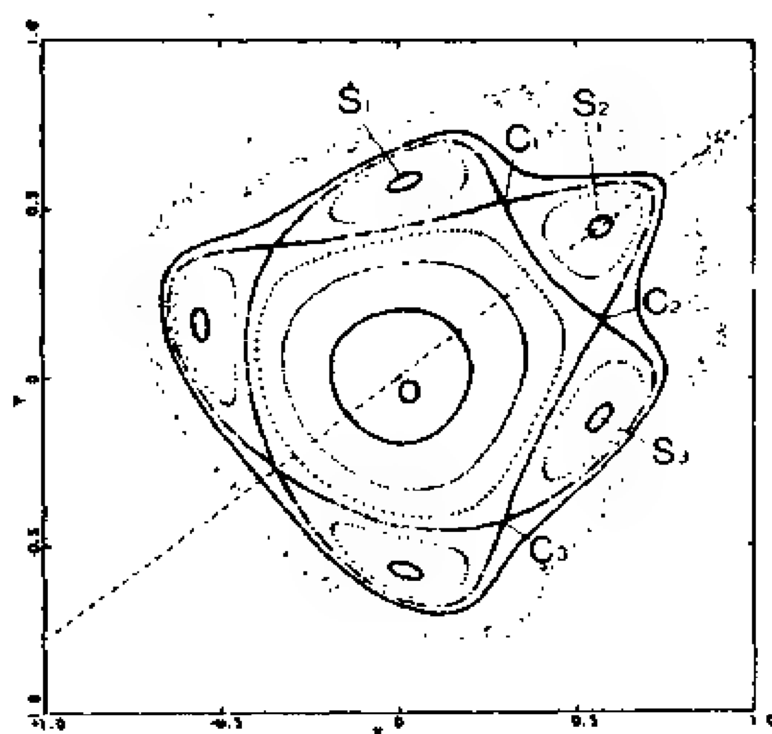


图 16 这一图形是根据海农公式在计算机上描出的. 它似乎清楚地从一个轨线像是随机的外部区域中分隔出一块具有规律性的内部区域. 然而, 正如下一个图象所示, 这仅仅是表象(根据《非线性动力学, 献给爱德华·布拉德(Edward Bullard)爵士》, 纽约, 美国物理研究所, 1978).

在第一个区域中, 人们已经同时表示许多轨线. 三个同心的卵形属于三条不同的轨线. 对于最里面的卵形来说, 那些落点是如此靠近, 以至给人造成一种连续曲线的错觉. 随着对点 O 的远离, 落点也渐渐分离, “曲线”不再那么清晰, 最后完全解体. 包络图形的某种光晕是最外面的一条仅有的轨线所形成的. 在这条轨线与内部轨线之间是一个变幻莫测的中间区域.

那里呈现出 5 个顶点为 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 的“小丘”, 它们被 5 个“谷点”C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 所分隔. 在每一个小丘上, 随着向顶点越来越靠近, “等高曲线”越来越清楚, 它们都是同一条轨线的各个落点造成的. 于是人们可以看到在每个顶点 S 的周围, 都重复了 O 的周围才有的结构, 即在此附近, 全都花了 5 倍 [58]

时间.由 S_1 附近的一个点出发的一条轨线,将先穿过 S_2 附近的一个点,再是 S_3,S_4 和 S_5 附近的点,然后再回到 S_1 的附近.这样,它就在5个小丘上同时构造了5条"等高曲线".特别是,由 S_1 出发的轨线,通过 S_2,S_3,S_4,S_5 后,又再通过 S_1.因而它是 [59] 周期轨线,其周期是参照周期的5倍.

"谷点"C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 也属于同一条周期轨线.于是人们发现,在参照轨线周围,有一个性态规则的内部区域,一个性态不规则的外部区域以及一个包含两条5倍周期的周期轨线的中间区域.

然而,状况的复杂性还远非如此.下列图形是一个放大:它代表放大20倍的 C_2 点附近.成雾状的点全属于同一条轨线.人们看到在上一比例尺下无法辨认的一种精细结构:外表清晰

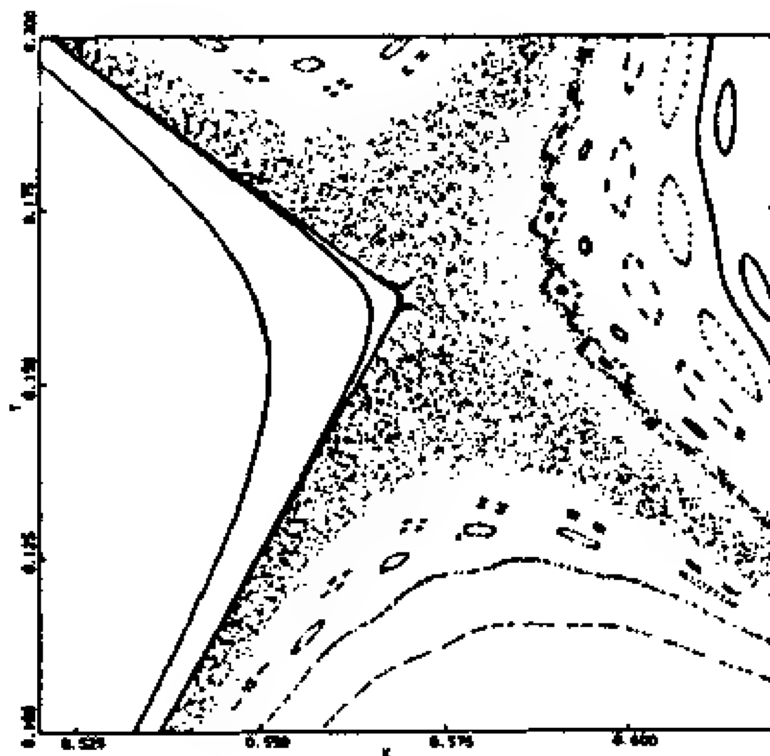


图 17 图16的点 C_2 附近区域的放大.所表示的点属于同一条轨线.可以注意到沉浸于混沌海洋中的各种等级的小丘所呈现的精细结构. [60]

的曲线解体为散布成一连串小丘的光晕.进一步放大还显示,这些小丘以缩小的尺度,又再生点 O 周围的上一图形的整体结构.每个小丘都是整体图形的忠实微缩景观,从而它们包含更小的小丘;这些更小的小丘自身也反映一般结构,如此等等,无穷无尽.

这样人们就看到一种极为复杂的等级结构;对此可用各种方式来进行观察.人们可把它比作具有各种大小的窟窿的海绵.也可把它想象为这样的招贴画,画中有一个人物指着一张缩小的招贴画,而这张缩小的招贴画中又有同样的人物指着同样的画,如此等等;或者可把它想象为面对面的镜子,镜中人们可看到无限反射,逐次的形象收敛于一个远去的点.还有那些一个套一个的俄罗斯娃娃.图 16 和图 17 包含它们缩小了的原有的形象.微观景象恒同于宏观景象.

这一结构体现了由参照轨线和中心轨线所刻画的、可预料的有规则运动,向由外围轨线所代表的颠簸、混沌的无规则运动的一种连续过渡.它们全是决定性的,因为它们都来自一个微分方程,但是哪一个面对图 16 和图 17 中的光晕的观察者,能不以为是看到一种随机现象的效应? 按照这一观点,运动实现了一[61]种有序与无序的非常密切的混合;它在表面上是一条有规律的轨线,但在更低的各层次下始终深受各种扰动,在无序的腹地,突现有序的小丘,而这些小丘自身又隐藏着无序的沙滩,其中同样的结构又在细微处连绵不断.有序和无序,有规则和无规则,可预料和混沌都交织在一起,就像被海岸线分隔的大地与海洋,峡角与沙滩犬牙交错,水洼和暗礁重叠无常,使人分不清海水始于何处,陆地终于何方.

周期轨线也是如此,它应该是规律性的无瑕白璧,却也显露潜伏的无规律.上面的两张图上就隐藏着大量的周期轨线.我们已经通报过两条;一条是由 O 出发的参照轨线,另一条是穿过小丘顶点的 5 倍周期的轨线(还可加上第三条通过谷点的周期

轨线).因为小丘再生了小型的整体结构,它们自身也应该包含一条轨线 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 的 5 倍周期轨线,即其周期是参照周期的 25 倍.这样人们就可在参照轨线周围揭示出周期越来越大的周期轨线,5 倍,25 倍,625 倍,3125 倍,如此等等.从第四条开始,需要在图上作出 3000 多个点,才能使人觉察到所对应的轨线是周期的.一个无先见之明的观察者是很难觉察它的,而把它看作一条混沌轨线倒是完全正常的.毫无疑问,人们可以由此走得更远,容易发现一条这样的周期轨线,其周期可长到超越计算能力.

庞加莱被导至图 16 和图 17 的情景并非出于数值模拟,因为后者对于当时的计算手段来说实际上是不可能的;他用的是定性方法.他把周期轨线分为两大类,并把它们命名为椭圆轨线 [62] 和双曲轨线;他证明了椭圆周期轨线附近的局部状况是用类似于图 16 和图 17 的图形来刻画的(不过要除去某些罕见的例外情形).他的分析特别是蕴含着存在一族周期越来越大的周期轨线,其中每一条生成一些小丘和一些谷点,因而他严格证明了我们通过考察图画而得出的一些结论.

然而,在《新方法》一书中人们找不到这样的分析.它是庞加莱很晚才得到的.甚至总有一些事情有待他去证明.所有这一切都归结为一条悬而未决的几何定理.庞加莱能够证明它的许多特殊情形,但是不能证明它的一般情形;在其临终前他决定把它公之于世,留待其他数学家继续努力.最后在 1913 年定理被美国人贝克霍夫[①]所证明(这大概是美国在国际数学舞台上首次亮相),而该定理从此以"庞加莱最后定理"著称.

相反,人们在《新方法》中发现的是对另一种非周期轨线类型的分析,庞加莱对此称为同宿轨线.这里是他关于同宿轨线的

① George David Birkhoff(1884—1944),荷兰裔美国数学家.——译者注

说法:"人们将对这一图形的如此复杂而感到震惊,这使我甚至都不想去描出它.对于三体问题的复杂性,以至一般对于所有动力学问题的复杂性,什么也不能真正地使我们有一个观念,其中没有一致积分,而其波林(Bohlin)级数是发散的."有兴趣的读者将在附录中找到有关同宿轨道的介绍以及庞加莱不想画出的[63]图形.

决定论但又随机

我们就这样到达需要重建的时刻.我们已经拆除旧屋,原地该重建什么?过去的圣像是开普勒轨道,它是平面的、椭圆的和周期性的,尽管可能受小摄动而轻微变化,但本质上是可预测和可计算的:地球绕太阳转,今天如此,明天如此,万世不竭.这一圣像已被揭露为是糊弄人的,开普勒轨道在一个光晕中解体,以至谁也不知道地球是否永远绕太阳转.我们应提出怎样的新形象呢?

首先进入我脑海中的形象是掷骰子.这是自凯撒大帝①以来反复运用的形象,尽管如此,它还是传达了我们刚才描述过的运动的某些重要外观.就像掷骰子那样,这是一种决定性的但又随机的现象.更确切地说,其规律是纯粹决定性的,但每执行一次,其结果看来又像是随机的.

还有什么比掷一颗骰子更具有决定性呢?这一均匀的立方体离开掷者之手之后,就处于地球引力和空气阻力的作用下,蹦跳在我们特意选择的一块平坦而有弹性的桌面上,最后在撞击和摩擦中失去其能量而停下来.它只受经过大量研究的、众所周知的力学规律所支配;原则上,一旦给定初始动量,其余的运动都可通过计算来确定.另一方面,又有什么比掷一颗骰子更具有

① Jules César, Caius Julius Caesar(公元前101—44),古罗马皇帝.——译者注

随机性呢？甚至法文的"随机(aléa)"都是起源于拉丁文"掷骰子(alea)".我想,没有一个偶然性的抽象定义,至少是没有任何一个定义是内在的.人们用具体定义去补充它,最终的分析又会 [64] 回到掷骰子的经验上去.

这种模棱两可的特征正是我们在天体力学问题中所注意到的.由牛顿定律支配的运动是纯粹决定性的.但是某些轨线是如此不规则,比如图17中的那些云雾,或者图16中的那些外部轨线,分明具有随机特征.

然而,类比并非很恰当.我们容易鉴别,在掷骰子时有一个尺度问题.这一现象在小尺度上是决定性的,而在大尺度上是随机性的.这是由于众多微小原因叠加的结果;每个个别效应都可能完善描述,而它们的结合却完全不可能计算.同样,还有一个影响初始动量的不稳定性问题,稍后我们再来讨论它.

对于天体力学问题则并非如此.我们已经强调,在图16和图17中所揭示的结构在所有的尺度上重复;微观现象与宏观现象本质上是一样的.对我们来说,需要有一个形象来反映这种外观以及另外一些我们尚未谈到的外观.这种形象是存在的.它既不是偶然性的结晶,也不是模糊回忆的字句堆砌,而是自庞加莱以来三代数学家的辛劳成果.它阐述于动力系统的专著中,并被命名为"面包师变换"或"伯努利①推移".说来也真令人感叹,在一块20世纪为美国人(贝克霍夫、斯梅尔、奥伦斯坦(Ornstein)) [65] 和俄国人(柯尔莫戈洛夫②、西奈伊③、阿尔诺德)所掌握的领地

① 伯努利(Bernoulli)是17到18世纪期间的一个瑞士数学家家族.这里指的是雅可布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654—1705).——译者注

② Andrei Nikolaevič Kolmogorov(1903—1987),俄国数学家.1980年沃尔夫奖获得者.——译者注

③ Yacov Grigorevič Sinai(1935—),俄国数学家.1996/1997年沃尔夫奖获得者.——译者注

上，一位 17 世纪的瑞士数学家竟如此为人们所怀念.

我们首先来看看面包师的杰作. 他拿出一块面团，用擀面杖把它擀到一半厚度，然后把它折叠起来又回到原来的厚度，再重做上述操作. 事实上，我们要求我们的面包师是把面团切成两段，擀成一半厚度，把一块放在另一块上，变成两层. 通过这种方式，它们始终保持同一个方向，为此，在重叠时要把第二块转向放在第一块上. 我们可能把做面包的活复杂化了，但是简化了数学.

在图 18 中我们图解了这一操作. 最初的方块代表面团原来的大小. 它被擀面杖压成一半高度，而使宽度加倍. 切下右面的一半，把它放在前一块上，它又构成一块方块. 正如阿尔诺德所做的那样，我们在最初的方块上画上一个猫的脑袋，再画出其逐次变形，这就构成令人十分惊讶的图景. 下面我们再进一步来阐述阿尔诺德的这一传世之作.

如果我们重复上述操作，先压低第二个方块，再把两半重叠，那么我们得到由四条水平带所组成的第三个方块. 猫的脑袋则被切得面目全非. 人们将注意到这些带形的相互交替：第一条与第三条在前一个方块中在一起，而现在被第二条带形所分隔. 人们也将注意到可能的不连续性：离得很近的点 A 和 B 变为离得很远的 A'' 和 B''.

当人们反复变换时，情况就更为复杂起来. 不妨说面包师要做一个千层饼，而不定地操作他的面团. 经过十次以后，这就不止是千层，而是 1024 层了，二十次以后，则将超过一百万层. 所有这些越来越薄的层互相混合，一而再、再而三地一层叠上一层，就像打扑克牌那样. 阿尔诺德的猫被东一刀、西一刀地剁成肉酱. 这使我们想起路易斯·卡罗尔①的《阿丽斯梦游奇境记》中

[66]

① Lewis Carroll，英国数学家和作家查理·道奇松（Charles Dodgson，1832—1898）的笔名. 脍炙人口的童话《阿丽斯梦游奇境记》的作者. ——译者注

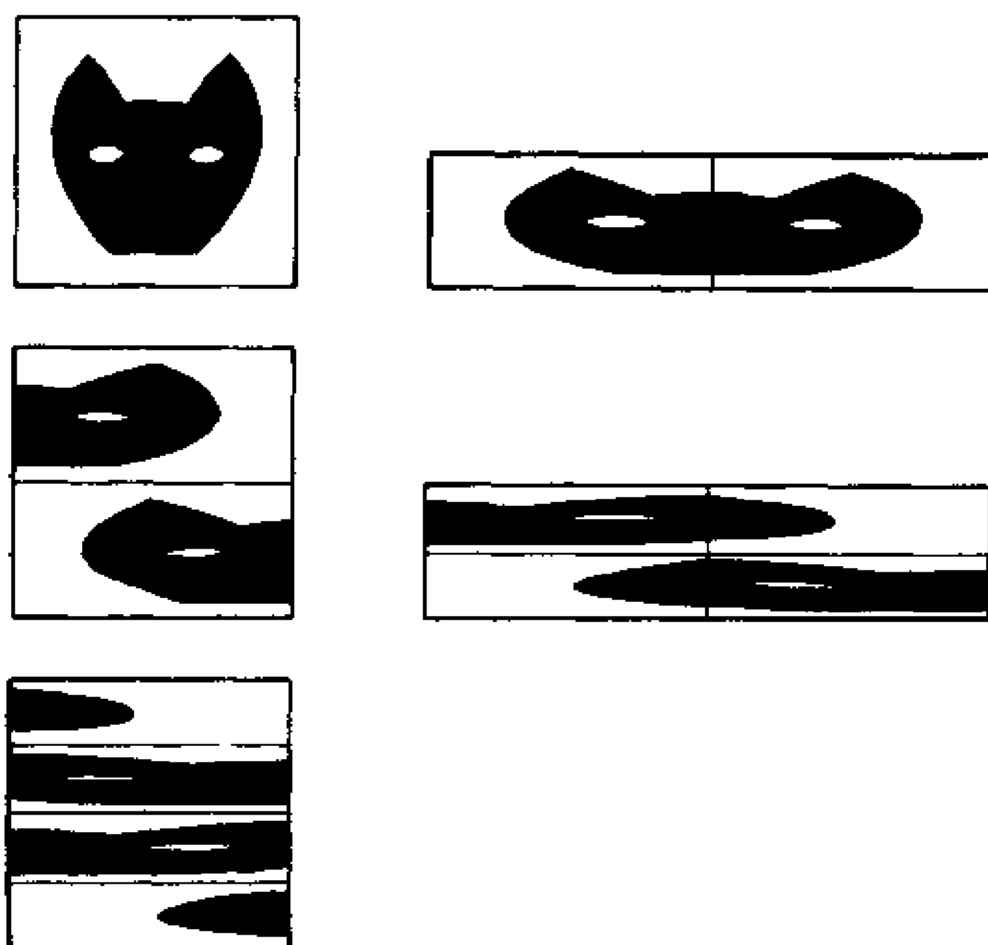


图 18 阿尔诺德的猫.

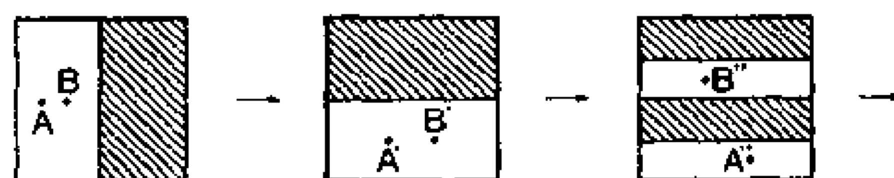


图 19 面包师变换.这里指示了 A 和 B 的逐次变换. [67]

的猫:它的显现和消失都是在不同寻常的时刻,并且在它的躯体的其余部分都已消失很久以后,它的微笑还在空中飘荡.阿尔诺德的猫虽然不太雅观地隐藏在方块中,但也是那样地忽隐忽现.

然而,它始终在那里,人们可以使它不断重现.这只需要面包师把方块擀平改为加厚,在半高处切为两段,再把得到的两段

并排放在一起.这就回到类似于上述的操作:擀平和重叠,而变为加厚和并放.这一操作旨在后退,带形的个数被除二,使1024个带形变为512个带形,10次以后,微笑的阿尔诺德猫就重现在原来的方块中.

这里我们有一个典型的决定论现象.通过一种简单规律的后退运用,当前完全确定未来.对一给定时刻的状况的知识可用来重构不管什么时刻的状态.过去与将来都完全禁锢在当前中.然而,所观察到的效应是如此不规则,使人不由得要对它加上修饰语:随机.人们会想到打扑克,在高手间会越打越好.由于许多我们提到的数学家们的努力,这一随机特征今天已被澄清,并且表达为一个数:变换的熵.

[68] 我们不准备卷入这个过于专业、对外行不太有用的概念的探讨.幸而,对个别轨线的考察,即对一个点的逐次变换的考察,足以显露现象的随机外观.这将是我们下面所遵循的方向.

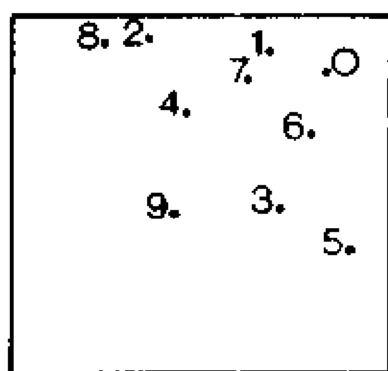


图 20 初始点的坐标为 $x=y=0.840675437\cdots$

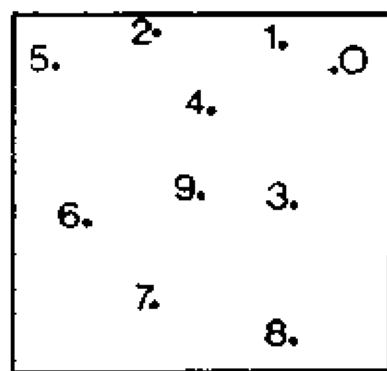


图 21 初始点的坐标为 $x=y=0.846704216\cdots$

第一个想法是在方块中记录被选点的逐次变换的结果.图20和图21中,人们看到两个原来很接近的点 A_0 和 B_0 的前九次迭代点 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_9$.人们可注意到,同一个点的迭代点趋向于在方块中均匀分布,而两个不同的靠近的点的迭代点分离很快.更进一步的实验,以成百上千次迭代来取

代九次，其观察结果仍然如此.

如果想研究非常长的时间间隔上的轨线，那么上述图象方 [69] 法显然是不够的. 那时就需要另一种更为巧妙的方法. 我们从稍微改变我们的操作的模式开始：面包师每次做十个带形，而不是两个. 初始方块的高度将降低为原来的十分之一，宽度则扩大十倍，而十条带形按次序一一重叠.

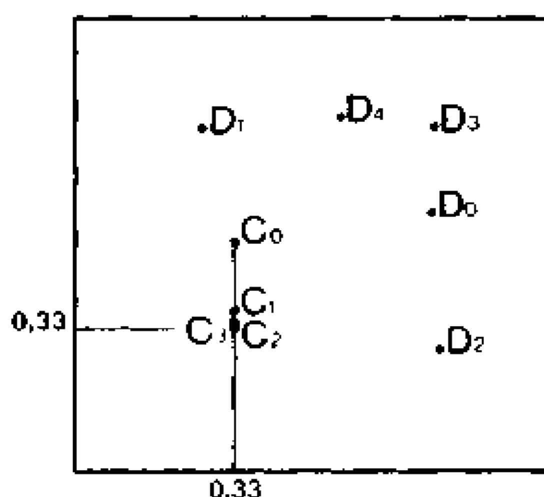


图 22 十进面包师变换. 它也称为伯努利推移.

固定方块的边长为 1. 于是方块中的每一点可通过两个十进小数来表示其坐标，其中第一个数是其向底的投影，第二个数是其高度. 例如，图中的点 C_0 位于半高处与左边距离为三分之一，其坐标将为数 0.333333…和 0.500000. 一般来说，任意给定两个十进纯小数，就对应方块中的一个点. 比如，我可以在一个 [70] 袖珍计算器上随意给出这些数，我对 RANDOM（随机数）钮按两次，得到 727 和 756，记下数 0.727756…；再用同样方式得到 0.578675…. 由此就在方块中作出对应的点 D_0，其精度不低于第二位小数.

面包师变换现在写起来很简单：取出第一个数（水平投影）的第一位小数，作为第二个数（高度）的第一位小数. 这样，C_0 的变换 C_1 为：

C_0: 0.333333… 及 0.500000,

C_1: 0.333333… 及 0.350000.

而 D_0 的变换 D_1 为:

D_0: 0.727756… 及 0.578675…,

D_1: 0.27756… 及 0.7578675….

很容易用同样的程序计算 C_0 和 D_0 的逐次变换象:

C_2: 0.333333… 及 0.335000…,

C_3: 0.333333… 及 0.333500…,

C_4: 0.333333… 及 0.333350…;

D_2: 0.7756… 及 0.27578675…,

D_3: 0.756… 及 0.727578675…,

D_4: 0.56… 及 0.7727578675….

如此写出的变换就称为伯努利推移:它就是这样简单地把[71]第一个数字(水平投影)向右移动小数点,把第二个数字(高度)向左移动小数点.这是面包师变换(其中我们已经把因子$\frac{1}{2}$取代为$\frac{1}{10}$)的一种特别方便的表示.

现在设想我们的知识局限于第二个数字,而第一个对我们来说未知.比如,可以让观察者位于方块的一边,使其只能从侧面看到方块.他将能对垂直位移完全定位,但不能察觉水平运动.对他来说,变换的二维中的一维被掩盖了.

我们来看一下前面的例子.从 C_0 出发的第一个序列,观察者看到一个位于 0.500000…的点移动到 0.350000…,然后是 0.335000…,如此等等.我们注意到逐次变换越来越接近于点 $0.333333\cdots=\frac{1}{3}$,但永远达不到它.我们也可注意到,如果观察者向前追溯,他将看到 0.500000 被取代为 0.000000…,并且不

再移动.对他来说,运动的历程于是就变为:一个在过去所有时刻都固守一处的点在时刻零突然移动起来;它先移到$\frac{1}{2}$,然后离开这个位置,逐步逼近$\frac{1}{3}$,但是永远达不到.

联系 D_0 的观察导致一种极不规则的运动:观察者既不能给出简单的规则,也不能把握它的历程,对他而言,现象似乎是完全随机的.

人们可以用幻灯来表演这一过程:用灯照亮我们的方块的反面,并把它投射到暗室中的屏幕上来汇集逐次迭代.于是我们将得到柏拉图的洞穴之谜的一种现代版本①.在柏拉图那里,现实变化为现象,而在这里,决定性变化为随机性.这两种神秘性 [72] 的解释是有联系的:因为有一部分信息没有被人们所接收,使得决定论现象看来像随机的.

我们清楚地了解,观察者在哪一点上对现象的了解是无能为力的.他掌握从混沌初开到当今时刻的全部过去的观察,也就是说,他彻头彻尾地知道过去.事实上,对第二个坐标的知识在于:它在时刻0时例如为0.578675…,就意味着它在紧跟的时刻-1时为0.78675…,时刻-2时为0.8675…,如此等等.如果人们知道所有这里用省略号所表示的数字,也同样能无限追溯过去的坐标.

相反,人们不能向前推,哪怕只推一步.设想在时刻0的值是0.578675….那么在下一时刻有十种可能:从0.0578675…直到0.9578675…,中间是0.1578675…,0.2578675…等等.情况是这样的:如果所观察的现象对应点 D_0,其下一个值将是0.7578675…,但在现在和过去的观察中,对此什么也不能预料.它们给出

① Plato(公元前428—347),古希腊哲学家.柏拉图的洞穴之谜是柏拉图对人类认识的局限性所提出的一个比喻.设想有一些人被局限在一个只能看到一些由火照亮的物体的影子的洞穴里.他们的认识就不能与洞穴外的人一样.——译者注

了所有其他数字，就是不知道最重要的第一个数字，以致人们不能说下一个观察值将会变化多大程度．当然，这只是为了强调，随着人们试图在以后越走越远，对于时刻 n 的观察值，人们只能预料其第$(n+1)$位以后的十进小数，而前面几位数字，即可用来确定观察值所在区域的数字，仍然是我们所不能触及的．

我们再来进一步做一种假想的实验．我们的观察者始终在黑暗的影院中面向屏幕，而在其一侧有一只小猴在为单调的演[73]出增添乐趣．小猴东张西望，发现一颗骰子，拿起就掷．如果那位观察者，记下逐次得到的数字，例如为 436345…，难道他不会说，这是用随机方式得到的？而现在，这些是以同样的顺序在观察中得到的数字，难道他不会说，他在注视的现象对他来说同样是随机的？然而，下列观察序列是完全可能的：

(时刻 0)　0.000000…　(为确定起见而设)
(时刻 1)　0.400000…　(出现 4)
(时刻 2)　0.340000…　(出现 3)
(时刻 3)　0.634000…　(出现 6)

如此等等，直至无限．为在屏幕上出现这个序列，操作者只需对原来的方块在坐标为0.436245…和0.000000…的地方放一质点．

这就是袖珍计算器的 RANDOM(随机数)键中所蕴含的某种机理．有什么能比计算机更有决定性呢？人们怎样才能产生随机性呢？事实上，人们是通过决定性来产生随机性的，就像图17 中的云雾般的点似乎偶然散布，或者像面包师变换中的点的垂直位移完全不可预料．为得到这类游动序列的程序是存在的；最简单的一种是截断乘法，即通过两个六位数相乘来得到另一个六位数的方法，后者由乘积的最前三位数字和最后三位数字所组成．这样由 RANDOM(随机数)键得到的数总是某种计算的结果，这并不妨碍人们把它们看作随机数．

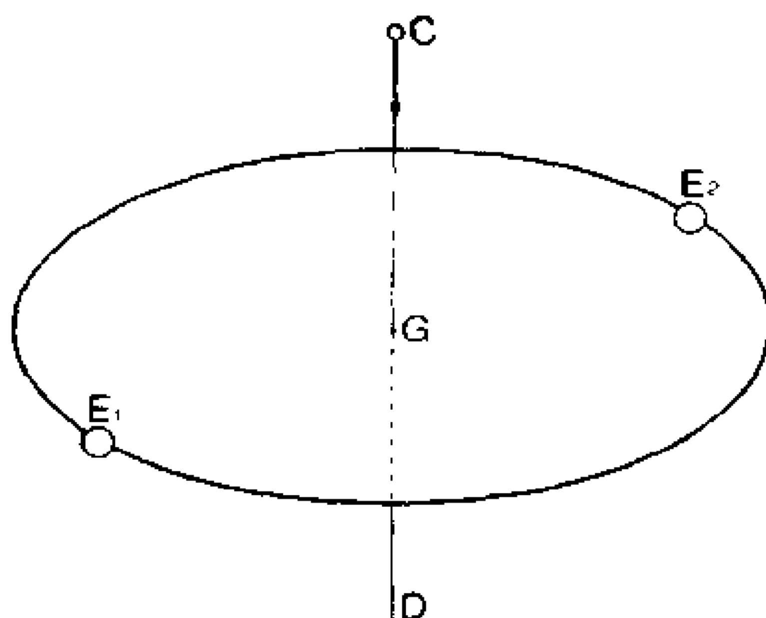
综上所述,面包师变换纯属决定论.然而,若以某种方式观 [74] 察它,尽管不完全是真的,人们却恰好得到一个带有随机特征的测量序列,只要观察中没有带来任何误差.对我们来说,余下的问题是我们如何来快刀斩乱麻,或者说如何描述物理现实.面包师变换难道只是数学家们穷极无聊的把戏?除了这些假想实验外,它还能揭示别的随机外观吗?

多亏我们前面已经提到的那些数学家的辛勤劳动,特别是贝克霍夫和斯梅尔,今天人们已经知道,天体力学的运动,在某些领域内可归结为伯努利推移.例如,图 17 代表同一条轨道与参照平面的逐次交点;它同样也可通过同一个点用面包师变换得到逐次的映象来形成.这种类比并非只是形式:在一种非常确切的意义下,人们可以证明它们是同一个东西.从而,所有我们已经描述过的现象,都能在天体力学的范畴内重现.

人们因而将对某些受牛顿万有引力定律所支配的运动揭示其一种随机特征.经典决定论试图用来作为最后的庇护所的是:这种随机特征是否可能只在微观尺度上出现?而在宏观尺度上仍然保持其严格的确定性?我们直截了当地回答,完全不是如此.正如我们已经看到的,运动使得所有尺度上都有同样的结构,每一种微观现象都有其宏观对应物.

下面是一个著名的例子.有两个同样质量的天体,例如一组双星,围绕其公共的重心转动.假设 P 是其轨道平面.第三个质 [75] 量可忽略不计的天体,例如是小行星或彗星,处于前两者的引力之中.它在通过重心、且垂直于平面 P 的直线 D 上移动.根据牛顿定律,如果运动开始于这条直线上,它将永远保持不离开该直线.更确切地说,如果彗星在时刻0以沿直线 D 的方向的速度位于直线 D,那么它在所有(其他)时刻都位于 D 的某个(其他)点.

一年,当然,在这里指的是双星运动的周期,即它们在轨道上运动一周的时间.试问要经过多少年,彗星才会再次出现在平面 P 上;或者更确切地说,彗星出现在 P 与 D 的交点 G 上?



[76] 图 23 在双星 E_1 和 E_2 的共同轨道平面上观察彗星的路程.

再稍加说明.我们设想一颗有智能生物居住的行星在我们的双星平面 P 上受到引力吸引.这些外星人几代都在观察天空;它们能够看到彗星在轨道平面上通过,并且也注意到它在过去的某个日子也曾出现过,例如,17,35,143,230 和 305 年以前.人们甚至可以大言不惭地声称他们有史以来就已经观察到彗星,并且掌握一张彗星出现的完整的时间表.带着这些数据,他们去找他们的天文学家,问他:"什么时候我们能再次看到彗星?"

天文学家只能回答说:"我什么也不知道."彗星可能在今天、一年后、十年后、一千年后出现,或者再也不出现.所有这些回答都与他们掌握的重要信息是相容的.计算并不能使他们对这些可能性作出决断,甚至都不能设想哪个回答更合乎情理些.事实上,在这个构想中,牛顿定律恰好断言,所有序列都是可能的!这里的计算曾由切特尼可夫(Chitnikov)和阿列克赛也夫(Alekseev)所作出.一个正如我已经指出的观察序列:

$$\cdots, -305, -230, -143, -35, -17$$

可以以完全任意的形式继续:

0,1,2,3,4,5,6,7,…

或者

10,100,1000,10000,…

或者

71,757,8675,9431,…

如此等等.

所有这样完成的序列在物理上都是有可能实现的:总存在 [77] 某条彗星的轨线能够反复无常地按一个任意选择的数列来周旋,使得轨线穿过平面 P 的日子恰好就是这个数列所指示的日子.换句话说,未来的观察明显地独立于过去的观察.对于后者的知识无助于预测前者;进程中的连续一千次的观察知识无助于预料第一千零一次.这种过去与将来的相互独立,从决定论的立场来看,就是所谓随机性.

在一个诸如此类的行星系统中,脱离天文学实践的自然哲学将是完全不同于我们的哲学.星空不再是行星井井有序、翩翩起舞的大舞厅,而变为赌场中无名赌主发牌抽签的绿桌台.物理学家的第一实验将是上帝掷骰子,正与爱因斯坦的意见相反!

这里除了我们已经看到的以外,一无所有.对于过去的无限序列,人们可以在未来任意地补充它;以至一切都是完全不可预料的,就像我们已经在我们的黑暗影院中、在柏拉图洞穴的深处所看到的那样.这里它在更为广阔的舞台上呈现.但是,不管是在这里还是在那里,这些都是同样的现象,都是面包师变换的结果.

随机性起源于人们有确切而不完备的信息这一事实.信息的一部分被隐匿了.对于屏幕前的观众来说,这是点的水平位置,而垂直位移是随它而变动的.对于我们的天文学家来说,这是彗星穿过轨道平面的速度.一旦知晓这一速度,它的一切疑惑都会消失:他将能计算彗星的整个轨线,宣告其最近的历程以及 [78] 验证其所有的过去;至少原则上他能那样做.引人注目的是缺乏

这种信息,尤其是很难得到这种信息,这就使得对现象无法预料.更引人注目的是,人们所要求的下次经过的日子的消息,除了参照所缺少的横穿速度的信息外,别无他法.看来宁可在人们完全清楚的过去历程的序列中插值,但已被证实,那毫无用处.

在当前决定将来和包含过去的意义下的决定论于是只是在其集合中可取的现实的一种性质.一旦人们把自称已经观察和描述的现象序列在整体现实中、在世界体系中孤立起来,人们就会遇到从确定性的现实中只看到随机投影的风险.但是不这样做是极为困难的:隐身深埋的现实总是对我们遮遮盖盖,而科学的作用正在于掀起使我们只能见到现实的投影的屏幕.即使不可接受的现实是决定性的,由此引起的所观察到的现象可能是随机的.

这里人们又回到了早被批驳过的一些老调:科学知识不是对事物本身所带来的一种注视.在被康德①重新袭用的柏拉图传统中,事物本身是主体,它在时间和空间中表现为一串可感知的现象.主体则只被唯一的智力思辨所接受,它所涉及的与其说是一种揭示,不如说是一种发现,但是人们能使它走进一些陷阱,追使它在可感知的世界中表现.这正是例如科学实验的作用.

[79] 今天,甚至人们对承认一种不可感知的现实的存在性犹豫不决时,也会通过另外的道路达到同样的局势.从狭义的科学观点来看,人们只能承认一个唯一的现实,甚至一个唯一的事物:这就是就其整体来说是可感知的宇宙,所有从其起源以来的现象全体.严格地说,不存在一个封闭系统,使得人们可以对它孤立地应用物理定律.处于已知的宇宙边缘的小电子,在牛顿模型中,通过其重力场和磁场,对地球仍然有影响;就像在量子力学中波的作用始终不消失一样.当然,这种作用是微乎其微的,但

① Emmanuel Kant(1724—1804),德国哲学家.——译者注

要肯定其可忽略不计仍然是一种原理上的托词.我们将在下面再讨论这一点.这里,我们乐于直接断言,物理学的唯一客体是整个宇宙:只有它才包含严格应用物理定律的全部必要信息.对于这个宇宙的完备、整体、详尽的描述对于严格进行科学研究是必要的,而对我们来说,这个宇宙又像康德的主体一样完全不可触及.于是人们被迫把宇宙分为若干个子系统,并对它们孤立地应用物理定律,就像研究太阳系时,不考虑其他星体一样.这仍然只是一种投影,幸而它或多或少地总能进行:只需谨慎地放弃一部分信息.为了从现实的整体中分割出一些现象来,人们把不可接受的唯一现实丢在一边.人们回到了洞穴之中,支起了屏幕,观看投影.

这样人们能够强有力地肯定决定论规律,并观察到随机现象.决定论是位诸侯割据下的挂名君主,尽管其领地号称普天之下莫非王土,其实谁都不买他的账,甚至有些诸侯早已投入敌人 [80] 麾下.开普勒定律的说一不二,即使在牛顿宇宙中,也是绝无仅有的.在另一种时间或空间的尺度下,行星运动似乎也是随机的.今天人们被迫接受的模型是面包师变换,由此出发,一种纯属决定论的规律,如果掌握的信息只是部分的(实践中必然如此),会通过完全随机的现象来表现.

不稳定而又稳定

曾经有过一位姓劳伦茨(Lorenz)的气象学家.他生活在(他还继续健在)计算机开始改变科学研究条件的时代:从此人们可以进行所谓"数值模拟",即通过计算来检验数学模型,而以往它将耗尽研究者的一生精力.

在那个时代(50年代),不像今天,公众对气象预报缺乏信心.气象学家们也并不比别人更满意.然而,方程摆在那里,当然,十分复杂,甚至非常复杂;既然它摆在那里,它应该可用来以少许精度来预报天气.可是问题并未解决:人们能够大致预报明 [81]

天的天气，但是如果需要预报下星期的天气，数学模型和最新一代的计算机并不比阿尔伯特·西蒙(Albert Simon)的青蛙更灵.

劳伦茨决心为这一不光彩的竞赛而奋斗，他通过简化气象学方程来作为起步.那些方程在他手下简化得使人们不由得会怀疑：如此简单的方程难道还会与天气有多大关系.尽管如此，最终他得到一个依赖三个参数(a,b,c)的三个未知函数(x,y,z)的三个微分方程所形成的方程组：

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay,$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - y - xz,$$

$$\frac{dz}{dt} = -cz + xy.$$

对外行来说，这里除了许多字母外，不知所云.不过，我向你们担保，人们已很难使它更简化.仅有的复杂之处在于引入了形为两个变量之积的交叉项：在第二个方程中是 xz，而在第三个方程中是 xy.如果消去这些项，余下的项就只包含一个变量，从而我们得到一个非常初等的方程组，并且可以完全明确地对其求解.总之，劳伦茨的方程组是不能直接求解的方程组中最为简单的.

事实上，它不是显式可解的，即人们不能给出变量 x,y,z 作为时间 t 和初始位置的函数的表达式(这又是一种我们以前提到的"不可能的计算").按照常规，人们可对它进行"数值模[82]拟"，即给定初始位置 x_0,y_0,z_0，通过计算机算出逐次的位置：时刻1的位置 x_1,y_1,z_1，时刻2的位置 x_2,y_2,z_2，如此等等.

这正是劳伦茨所做的事.他使用不同的位置和不同的时间间隔，进行相当多次数值模拟.在计算机上算了许多小时.他希望重复一次特别长的模拟，使其最终态势更为精确，于是他设想从中间开始计算.他把中间位置输入计算机，并由此开始计算，从而应该正常地重现最终态势.然而，我们却听到他这样说：

"在我们的工作进程中,我们决定更为详尽地考察所得到的一个解;我们取出通过计算机打印出来的中间数据,把它们作为新的初始数据引入.在我们的重复计算中,一个小时以后,计算机模拟了大致两个月的天气,我们发现,所得到的解与以前得到的解完全不符.我们的第一个反应是怀疑机器出了毛病,这是司空见惯的;但是我们很快就明白,这两个解并非来自同一数据.计算机进行六位数字的运算,但打印出来的只有三位,因而新的初值条件等于以前的初值条件加上小扰动.这些扰动被指数阶地放大,每隔模拟天气的四'天'就翻一番,以至到两个月的终点,两个解就各走各的路了.由此,我立即得到下列结论:真正的支配大气的方程与这个模型如出一辙,不可能对气象作出长期的详尽的预报." [83]

劳伦茨方程对初值位置有不稳定性.对它的觉察不到的修正在运动中会被放大,最终导致完全不同的轨线.如果现在人们记起劳伦茨是如何得到他的方程的,就会理解为什么天气预报是如此困难.这就是气象学方程自身有这种不稳定性:观察的微小误差、初始条件的微小变动都会最终被演变为一幅完全不同的景象.人们甚至能够确定这些小偏差的放大率:每星期放大4倍,每月放大300倍.这种效应被劳伦茨美称为"蝴蝶效应":一个蝴蝶随心所欲地飞行会引起波及天气的空气位移,当然不是明天,而是一年以后.这就是长期天气预报的困难所在:需要绝对地考虑到一切因素!任何影响,不管它是多么微不足道,都是先验地(a priori)不容忽视的.

现在人们已经知道许多力学或物理学方程组有同样的不稳定性类型,即它在运动过程中会放大初始偏差.如果人们精确重复同样的初始条件,必然会带来细小误差,微乎其微的偏差.随着时间的推移,它会被放大,而人们将观察到完全不同的演化.在这样的意义下,系统不是决定论的:人们将永远不可能走同一条道路.实验不能被重复,至少在绝对精度上,不可能再现.如果

人们用同样的方式来掷骰子两次，应该两次得到同样的数字.不幸的是，没有人能做到用同样的方式来掷骰子两次；这就是为什[84]么掷骰子游戏被当作一种偶然性的游戏，而不是必然性的游戏.这里不禁使我们要引用赫拉克利特①的话："人们不能两次趟过同样的河，也不能两次触摸同样状态的变化中的实体."

这种类型的系统，即决定性的、但由于不稳定而不可预测的系统，长期来已众所周知；像麦克斯韦和庞加莱那样的大师，早就掂量过其后果.我们引用麦克斯韦的论述："同样的先决条件总是产生同样的后果，这是形而上学的教条.谁也不知道怎样来批驳它.但是这在同样先决条件从不再生、没有任何东西会重复两次的世界中很少有用(……).与此相似的物理学公理是类似的先决条件产生类似的后果.但是这里我们是从确切过渡到类似，从绝对精确过渡到或多或少的近似.有这样的现象类型(……)，其中数据上的微小误差只导致结果上的微小误差(……).也有另一种现象类型更为复杂，其中人们会遇到不稳定情形，其变化频率会随着变量个数的增加极为迅速地增加."(1873)人们同样可以引用庞加莱的类似论述.

这些将迫使我们思考运用物理定律的方式.我们已经在前面说到过，曾经有过这样的时刻，人们只能把物理定律直接用于整个世界的系统.而事实上，人们只是把物理定律用于因思维或实验设备的限制而被孤立起来的一些子系统，宇宙的其余部分对所考察的子系统的影响则被当作可以忽略.比如，在行星轨道[85]的计算中，丝毫不考虑邻近的星体或遥远的银河系所造成的摄动.但是当人们面对不稳定的系统时，这种做法会导出一些令人惊讶的结果.

我们如同在一个台球厅里，观看一张台球桌.台球选手之一正在为连击数球而进行计算.他自然忽略观众的重力场，尤其是

① Heraclite(公元前540—480)，古希腊哲学家.——译者注

我的重力场,对台球运动的影响.其实,他虽然有理,理由却并不充分.计算表明,一个观众出现在桌边对台球的两次撞击的影响确实可以忽略,但对于九次撞击就会变得重要起来!换句话说,如果人们寻求的是九次球的连击,而不只是两次球的连击,必须考虑厅中的观众位置.现在,每个人都知道,气体的热动荡可看作一局有数不清的球的三维台球运动.如果对它进行同样的计算,人们会发觉,当撞击超过56次以后,就会感受到一个位于已知宇宙边缘,即10^{10}光年外的电子的影响!所有这些都是在牛顿力学的决定论框架内考虑的,并未涉及量子力学的测不准原理.

这样,就不稳定系统而言,企图计算其轨线是徒劳的.人们完全可以尝试对3个或10个球(这个数目远低于为了表达一个克分子气体所需的$6 \cdot 10^{23}$个台球)的一局台球运动进行数值模拟,把球的初始位置和速度输进计算机,就能输出以后的位置和速度.然而,其结果很快就完全失去意义.首先计算机有舍入误差:它以12位或24位十进小数进行运算,而略去每次乘法或除法中出现的多余的十进数位.这些误差如同在劳伦茨问题中一 [86] 样,被迅速放大,并使最终结果走样.与此同时,系统并非是孤立的,而是被制约于大量的被数学模型所忽略的扰动(诸如房间中的实验员,天狼星上的一颗电子的运动)之中.但是,正如我们已经看到的,这些扰动极为迅速地就变得非同小可,使得计算结果尽管准确,却不能减少其远离观察结果的程度.

在上节中,我们已经看到,如果有用的信息有一半被遮盖,一个决定性的系统是如何会变得像是随机的.现在的状况稍有不同,全部信息都是可支配的,问题在于人们无法把握整体.人们可以把位置与速度测量到所需要的任何精度:但是总要失掉一些精确确定位置和速度的小数位.测量数据与精确数据之间的微不足道的偏差被迅速放大,造成预测结果与观察结果之间的显著偏差.系统看来是决定性的,但难以对它作出长期预测.

骰子在我们掌握之中,支配其运动的微分方程也一清二楚.对我们来说,应该可由此来掷出一个六点来.不幸的是,这是一个不稳定系统,我们从来都无法用足够精确的掷法,来确保所掷出的最后结果.

于是这是定量[①]方法失效的另一个方面,这种计算无能为力的现象我们已经对于天体力学顺便揭示过.现在再次使我们只能求助于定性方法:既然人们不再预测个别的轨线,那么还有什么可研究的呢?对于不可预测的系统,人们在科学上还能说[87]些什么呢?

对于掷骰子问题,其答案早就知道.需要考虑的不再是每次个别投掷的结果,而是所有投掷结果的全体.这样,人们可以说,6种可能有的结局是以同等的可能性经常出现的.人们宣称每种结局的概率为$\frac{1}{6}$,并基于此建立了概率运算.

对于比劳伦茨方程更一般的类型的不稳定系统,自1960年以来,已经得到一些类似结果.这里,除了已经提到过的名字外,尤其是斯梅尔和西奈依外,应该提到数学家阿诺索夫[②]和物理学家鲁爱尔(Ruelle).

第一个问题是以适当的方式来刻画对于系统来说可能有的长期状态集合.在掷骰子的情形下,这很容易,因为被投掷的骰子最终停留在一个面上,以至人们有6个可能的位置.在一般情形下,比如对劳伦茨方程,这就复杂多了,因为运动在不确定地延续,而不表现出自然的结局.尽管如此,人们还是设法定义了一种或多种“无限时的运动”,它们是不管初始位置如何,系统总要趋向的运动状态.这些无限时的运动一般非常复杂.每个这样的运动在其固有的空间的一部分中发生,这部分空间界于曲面

① 原文作“定性(qualitative)”,似有误.——译者注

② Dmitriǐ Viktorovič Anosov(1936—)俄国数学家.——译者注

和立体之间,并且冠以一个使人浮想联翩的名字"奇异吸引子".

正如这个名称所示,奇异吸引子是很难表示的.其中最传神的形象是著名的斯梅尔"马蹄铁"(如图).

为了更好地理解这点,我们再回到面包师揉面的形象;但这次他是用挤压的方式来揉面.也就是说,他将使面团的体积减小.他取出一块方形面团,将其拉伸,压扁,然后把它折叠,形成某种马蹄铁形状;由于面积已经减小,就无法再用它来取代原来的方块. [88]

这样,人们定义了一种方块到其自身中的变换,这是一种使面积减小的变换,不同于图18中的伯努利推移.

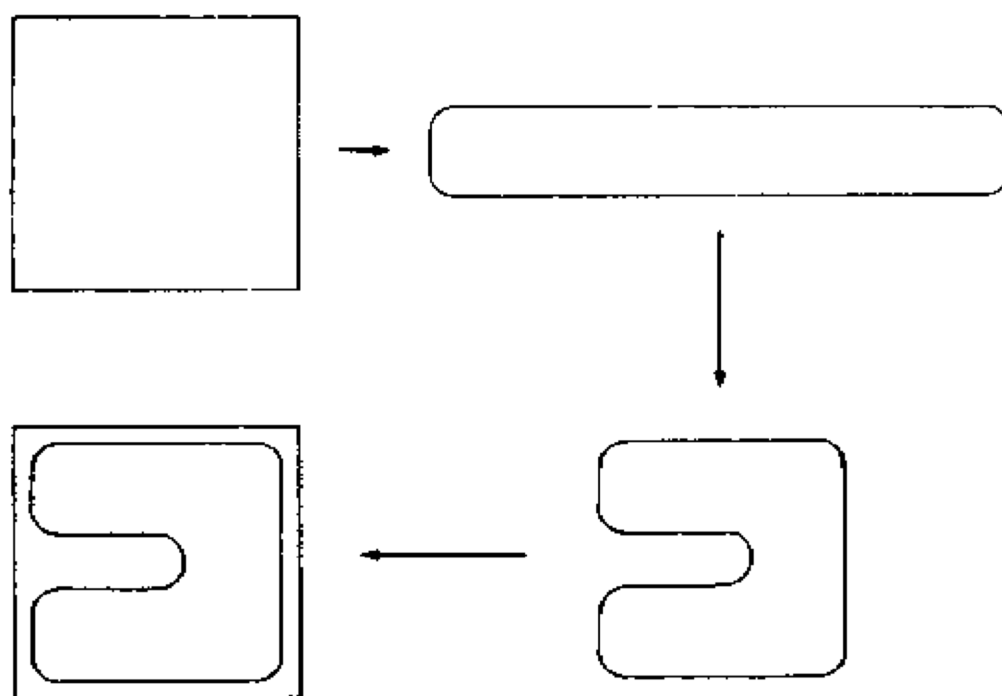


图 A 斯梅尔的马蹄铁.

回到图A,人们可以问道,开始时属于马蹄铁的一些点跑到哪里去了?随着一步又一步的变换,人们察觉,马蹄铁本身也被拉伸、压缩和折叠,它在原来的方块中的最后的映象各有两条带形在马蹄铁的每个分支中,总共有四条带形(图B). [89]

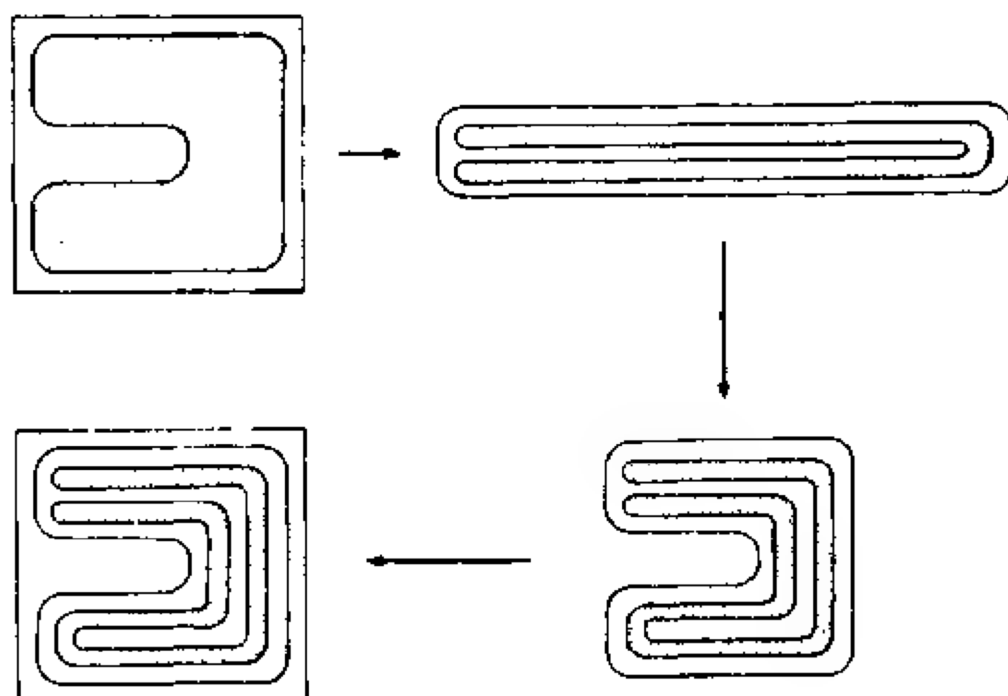


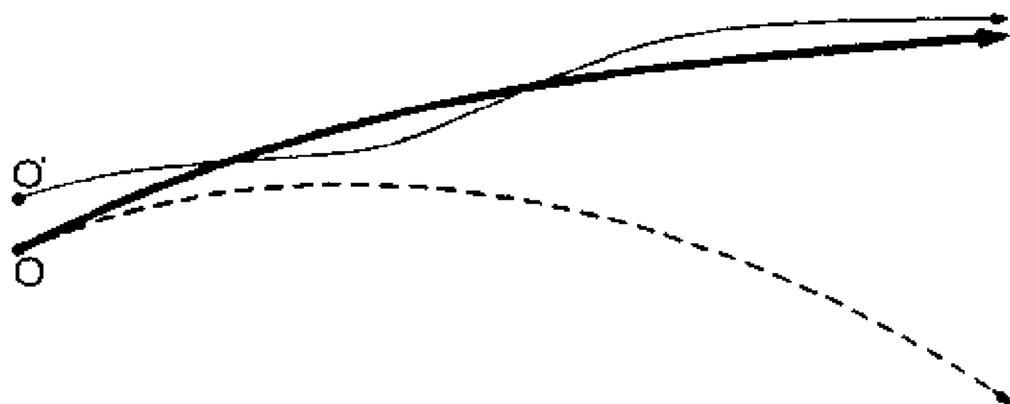
图 B 马蹄铁的映象.

显然,人们可以继续下去,并且找出马蹄铁的迭代形象,即它在初始方块中的逐次形象:人们将发现它们一个套在一个之中,每次都使马蹄形的数目加倍.所有这些迭代的交集(这里我们的直观想象已不再够用),藏身于一个奇怪的形状中,它由一条无限而又连通的带形所组成,又为所有马蹄铁的变形所共有:这就是奇异吸引子.它超出了建立在我们日常经验上的几何直观,但是它确实存在:为了使其变得更明显,只需从方块的任何一点出发沿轨线前进.人们将由此描出一个既非曲线,又非曲面的混合对象:这就是奇异吸引子.

[90] 奇异吸引子对于系统的自然结局,就如6个最终结果对掷骰子那样,扮演着同样的角色.它们是类似于面包师变换的"最终运动"的载体,除了这点与6个结果是最终位置的载体不同外,其他各方面都是完全相似的.它们也是概率的载体,不过比掷骰子的$(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$更加难以表达,但是它依然存

在，并且扮演同样的角色．再进一步的叙述就超出了本书的范围；此外，我们似乎已进入了一个尽管有相当活跃的研究、但许多问题尚无答案的领域．同样，我们也在附录2中向读者介绍一个简单的例子：费根鲍姆分岔，留待读者自行想象奇异吸引子．我们将会在那里看到，在一个其性态曾是完全有规律的系统中，奇异吸引子的出现是如何造成混沌的．这也是物理学家为什么对这些方程是如此感兴趣的原因：他们希望把流体运动中的湍流现象与在对应的方程中的奇异吸引子的出现联系起来，由此得到至今还不能在分析中描述的现象的数学模型．

因此，定性方法远不再是定量方法因处境拮据而请来的穷亲戚，而是能使诸如流体力学那样的领域大大推进的新法宝．它甚至受益于被定量方法所拒绝的稳定性．事实上，阿诺索夫在1961年指出，在对初值条件不稳定的劳伦茨方程类型的方程组中，一丁点小扰动的效应本质上改变了轨线．而另一方面，被扰动的系统的每条轨线都位于原来的系统的一条轨线的邻近．这 [91] 两条轨线不再有同样的初始条件，但在时刻0、以至随后的时刻，它们的位置都相近而有区别．至于我们已经刻画过的不稳定的性质，将被说成：可以断定，由原来的系统的初始条件出发的



不稳定性 我们用粗线表示从初始位置 O 出发的参照系统的轨线．系统的一个轻微扰动足以完全改变这条轨线（虚线）．被扰动的系统仍有一条轨线在参照轨线的附近（细线），但它是从不同的初始位置出发的（点 O' 取代了点 O）．

被扰动系统的轨线很快就远离另外两条轨线，就如上图所指出那样．个别轨线的不稳定性因而与轨线集合的整体稳定性是相容的．

于是，系统是否稳定完全取决于轨线的全体，而不稳定则取决于个别的轨线．比如，以它们作为载体的奇异吸引子和概率，[92]对于小扰动，只会有轻微的改变．为了理解此中过程，再来设想掷骰子．如果对一个骰子稍为做点手脚，并不会改变6种可能的结局，被改变的只是它们各自的$\frac{1}{6}$概率．相反，一次特殊的掷骰子结果，即以某种位置和某种速度来掷骰子而得到的数字，很可能比如从一个6变为2，这是可观的变化．

因此，这也是为什么在动力系统研究中使我们紧紧依靠定性方法的又一个原因：在某些系统范畴中，只有定性方法才能用来接近物理现实．而定量方法，即使计算是可行的，也是不现实的，因为它们的计算结果只能用于外部影响微乎其微的孤立系统．从而，定量①方法只能用来研究稳定的物体，即对小扰动不敏感的物体．付出的代价是昂贵的：在个别情形下，必须拒绝预测其未来．如果一定坚持要进行预测，那么只能局限于短期预测，或者对于长期预测不得不求助于统计方法．

然而，不应低估定性方法所带来的有关信息的重要性．比如，奇异吸引子的识别，即使不能用来预测系统的未来，也有助于理解系统的演变．现在我们将转向一个这样的领域，其中定性[93]方法还将指出另外的可能性；这一领域就是：突变理论．

① 原文作“定性(qualitative)”，似有误．——译者注

第3章 重返几何学

前 言

在已经有过连篇累牍的关于突变理论的长著短文以后，再拿起笔来写突变理论是会使人犹豫不决的．然而，尽管已经有那么多的阐述和评论，我仍然不禁有这样的印象：这一理论的一鸣惊人的成功以及它在很难接受数学发现的公众媒体中的反响，部分地是由于语词魔力所引起的一种原始错觉．

因此，我首先要说的是什么不是突变理论．它并不宣告突变的灾难：如果有人想知道世界末日何日开始，或者第三次世界大战哪天开战，那只能另请高明．突变理论丝毫不能预告是否有突变；这并非是一种犹如相对论那样的物理理论．它并不建立当前与将来之间的必然关系；它不是用来断定，如果人们今天这样地过，明天将会发生那样的事．

这是一种科学理论，但是在就如进化论是一种科学理论那样的意义下．这就是说，它把某些已知的事实重组，并且为了 [95] 同时理解它们，给出一种抽象框架．这是一种破译的密码，一种学者套在现象上的格式，并且将在心灵深处激起一种智力语言．

我们来听听达尔文①的讲话："在贝格尔(Beagle)号上的旅

① Charles Darwin(1809—1882)，英国生物学家．——译者注

途中，我曾经被深深地打动，首先是在潘巴[①]的地层中发现的一些披着类似现代犰狳身上那样的盔甲的大动物化石；然后是随着我们越来越向南美大陆南部前进，这些动物化石按其物种的相似顺序，一种一种地被替换；最后，又是按照加拉巴哥斯群岛[②]的极大部分的物种的南美特征来替换；尤其是按照群岛中的每一个岛上的物种之间的轻微差别来替换. 从地质学的观点来看，这些岛屿中没有一个是很古老的."这就是一个事实的集合，它就像普莱菲[③]诗集的标题目录那样地随意. 学者的工作看来是应该以最精确的可能来限定这些事实.

但是天才降世了. 尽管所有这些现象的出现是如此随意，他却能把它们从大量其他事实中区分出来，集中起来，进行整理，并使其说出一种人们从未听到过的言语："我曾经作好充分准备来斟酌到处可见的生存斗争，使我激动的观念是：在这些环境中，因势利导的变种趋向于保存下来，而不合时宜的变种则被淘汰. 其结果就是新物种的形成. 最终使我建立了一种理论."

进化论是一种科学理论已无可争议. 无论是它的支持者、贬低者还是那些打着咬文嚼字地解释《创世纪》的旗号的否定者，在这点上都是一致的. 然而，如果把它与引力理论来比较，它就[96]不应该是一种科学理论. 牛顿集中了各种不同的事实：行星运动、自由落体、潮汐等，把它们与一条完全决定它们的公共定律联系在一起. 他未作任何解释，面对超距作用的物理现实论，他甚至是怀疑论者；但是他给出了一个规范的数学模型，它完善彻底地描述了所考察的现象，以及它们的过去和将来.

至于达尔文，他是发现了一种内在逻辑；这种内在逻辑类同

① Pampas，位于阿根廷中部. ——译者注

② Galapagos，位于厄瓜多尔西部的太平洋上的火山群岛. ——译者注

③ Jacques Prévert(1900—1977)，法国诗人. ——译者注

于造物主的专断统治，把表面上互不相关的现象都纳入一种协调的继承关系中，并且就这样用一种现象来阐明另一种现象.但他的模型并不规范，其意义在于它并不描出进化的路线.著名的"适者生存(survival of the fittest)"规律远不能像牛顿引力定律确定行星运动那样来确定动物物种的进化.

进化论的主要功绩首先在于鉴别出一个中心事实：物种进化，在此观点下，大量现象都可得以整理.其次是提供了一些可用来想象某些过渡的观念.对于拉马克①来说，这是常用的器官得到发展，以及后天获得的特征得以遗传.对于达尔文来说，这是生存竞争中适者生存.对于两者来说，都是物种适应的观念处于中心.

谁也不会因进化论不能在这里的意义下去预测而责怪它.我们的子孙后代在一百万年以后像什么？令人奇怪的是，对此谁也不感兴趣.人们的兴趣宁可在于过去：谁是我们的祖先？此 [97] 外，进化论回答后一个问题并不比回答前一个问题更高明，即使漫步在大地上：人类古生物学始终是把智人(homo sapiens)置于整个动物系谱中的"缺少的环节".

突变理论是如同进化论那样的一种科学理论.出于一种误解，人们似乎想把它当作一种牛顿模型，即一种规范的和预言的理论，其实它不是.这种误解来自它基于一种非常深奥的数学模型，即函数奇点的分类.人们立即把它设想为在所有著作中出现的牛顿模型，因为进化论并无数学支持.

这是一种双重错误.一方面，一种数学模型，即使是精确的，也可以是不可预言的.这正是我在整个上一章力求阐明的一点.我们已经看到，即使在牛顿模型的核心处，旨在作为当前的函数来完全决定未来的定量方法，也不得不屈从于只描出一种一般

① Jean Baptiste Pierre Antoine de Monet, Chevalier de Lamarck(1744—1829)，法国生物学家.——译者注

框架的定性方法.突变理论尽管基于一种精心制作的数学模型,却并不肩负成为规范的和预言的理论的使命.另一方面,把进化论置于一种数学模型之上的日子可能不会很遥远.比如,由于奥班①的工作,生存性概念被非常好地用数学语言来表达.这一概念可用来刻画生物系统或社会系统有很大的演化惰性:当它们可生存时,它们保持其原来的运动方向,一直到系统的生存遇到[98]危机为止.

耗散系统

现在我们转向一类非常特殊的动力系统:耗散系统.

这类系统的动力学特别简单:整个运动随时间的推移而越来越松弛,并趋向于一个静止位置.一些可能的静止位置称为平衡.

我们来进一步细述.一个耗散系统可以用一个或几个平衡状态来表示.如果,在初始时刻,系统以零速度位于一个平衡位置,它就再也不离开原来的位置:运动于是可概述为一种在平衡位置上的无限驻留.对于任何其他初始条件,或者系统位于平衡态之外,或者它被加上某个初始速度,运动就会起动.但是它将渐渐减弱:速度越来越小,系统无限靠近一个位于平衡处的极限位置.

耗散系统因而有一种特别简单的动力学:对于平衡的知识就完全概括了它.不管系统的初始条件中的位置和速度是什么,经过一段时间后,系统总是处于某个平衡附近.这样也就不会有开普勒问题中那样的周期轨线,其中运动物体无限次地通过和[99]离开同样的一些点.也不大会有如人们已经在天体力学中所观察到的那种带有随机特征的更复杂的轨线.对于耗散系统来说,所有轨线都趋向于平衡,并且无限停留在它的附近.

① Jean - Pierre Aubin(1939—),法国数学家.——译者注

最为人熟知的耗散系统例子是减幅摆.我们给摆按上一条刚性的杆,它将便于观察到很大的摆动.这条刚性的杆可围绕它的一个端点转动,而杆的另一端,按照传统的习惯,装有一个铜球.

人们立即可定出一个平衡:摆垂直,铜球在下.事实上,如果人们在这一位置无初速地放下摆,它就不再移动.不太明显的是还有一个平衡:摆杆垂直,铜球在上.如果人们在这个精确位置放开摆,并且不附加任何微小的速度,它也将不再移动.事实上,这个平衡肯定是存在的,但是它是不稳定的,因而很难在实验中观察到它.一丁点垂直偏差,一丁点初始动量,都会被放大,并导致摆倒向另一个平衡.

如果现在人们对摆强加一个任意运动,或者是偏离垂直再把它放开,或者是推它一下,那么人们将看到运动渐渐减弱,最后达到平衡;如果推它很猛,运动可能是完整地绕几圈,再是某些渐渐减弱的大摆动,最后是越来越小的围绕垂直位置的小摆动.同样的情况也可证实,铜球在下的垂直位置是一个稳定的平衡,因而容易在实验中实现:如果摆有轻微的偏差,运动会使其回到原处.

[100] 运动的减弱是通过系统中内在的各种摩擦来保证的,尤其是由于空气阻力.人们可以加大这些摩擦,比如将我们的装置伸长到水中;于是人们将看到摆会直接指向平衡位置,甚至不在附近摆动.这些摩擦以热的形式消耗系统的能量;动能,即在运动中投入的部分,只能减少.一旦它落到了零,运动就在平衡位置停止.这就是耗散系统名称的来源.

这个简单的例子已经向我们表明,应该区分稳定平衡和不稳定平衡.两者都是能使系统无限静止的位置,但只有前者吸引其他的轨线,因而在运动的整体刻画中扮演一个角色.这种区别当我们考虑一个二维的例子时,将会显得格外清楚.

我们把一个小球放在一个碗中;它将会滚动,也可能沿碗壁

滑动.最后,同样是由于有摩擦,它将在碗底停止不动.

现在把碗的形状搞得复杂些;碗底有两个盆地,它们被一个隘口所隔开.如果我们重新把我们的小球放入,那么它的运动势必更加复杂,不过最终还是要在碗底停止不动.但是这次它有两个可能的平衡位置,分别在两个盆地的底部,并且两者都是稳定的.那里甚至还有第三个平衡,位于分隔两个盆地的隘口的某个位置,只是它是不稳定的.事实上,在这个隘口的某个部分,应该有一个峰点,小球将在那里停止不动,并且不知道该向哪一边掉下去.为了去掉它的踌躇不前,只需对它加一丁点动量,它就会[101]扑向两个稳定平衡之一.

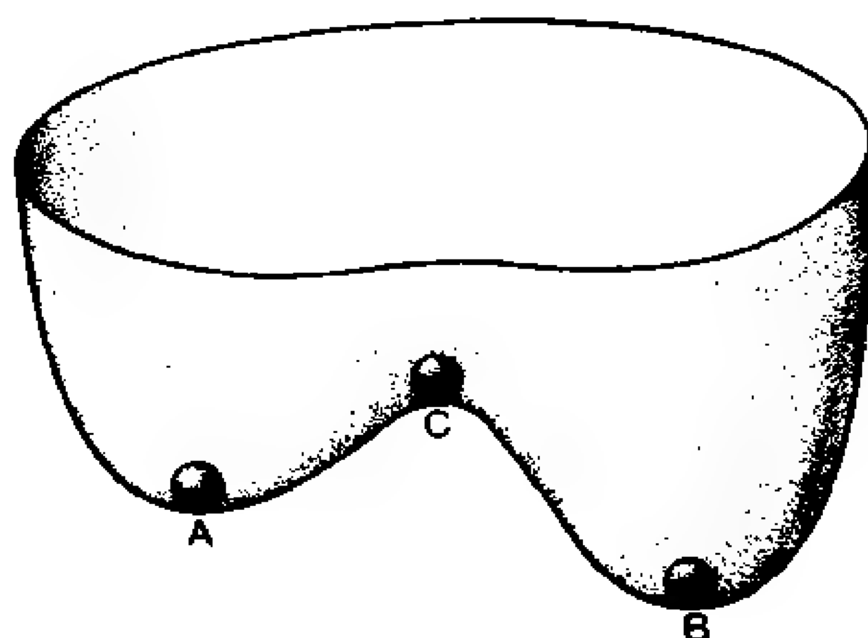


图 24 不对称的碗.我们指出它有三个平衡位置:两个稳定的(A 和 B),一个不稳定的(C).

人们还可以通过增加平衡位置的个数,使问题更加复杂化.于是就会出现这样一幅景象:一些盆地被绵延的山脉所隔断,它们通过各个山口互相来往.其起伏的基本面貌一方面是盆地的底,另一方面是分隔盆地的山脉的脊线.这些脊线上是峰顶与山口的交替,每条连接两个峰顶的脊线中,总能找到一

个山口.

在这种情况下,雨水的漫流就可提供一个物理模拟.雨水沿地势下流,填满盆地的底部、形成一些湖泊,它们就是一些稳定平衡.水面的分界线形成盆地之间的自然边界,它们恰好就是脊线.这些脊线上标出了由峰顶和山口组成的不稳定平衡,在那里 [102] 雨水会毫不回头地流向盆地.

这样,就需要来表达一般的耗散系统.为了以适当的方式来定义所谓系统的状态,有些工作看来是必要的.比如,对于诸如单摆或者碗中的小球之类的所谓二阶系统,状态将是位置/速度,而不仅是位置.有了这一措施后,耗散系统的运动,即状态随时间的延续,将忠实于水的漫流模拟.人们将有一定数量的稳定平衡,它们把状态空间分隔为一些吸引盆地.所有开始于一个盆地的运动不可抗拒地会趋向于在所对应的稳定平衡处静止,就像漫流会流向湖泊中一样.盆地之间的边界被一些不稳定平衡所标出,在那里水不知该流向何方.这些不稳定平衡对于系统的整体刻画来说不太重要.唯一重要的是吸引盆地的走向.除了刚好就在边界上这种例外和完全不稳定的情形以外,初始状态总将属于某个吸引盆地,它决定系统所趋向的平衡.

可以试图把整个直接演化纳入框框,并通过过渡:

初始状态→最终平衡

来概述其动力学;这样做也是很现实的,只要运动足够迅速.

需要注意两件事.第一件事是这一对应并非是连续的:初始状态的微小变化可能导致不同的最终平衡.对此,只需使初始状态靠近边界;于是一个小位移可使其跳出一步,落入不同的吸引 [103] 盆地.第二件事是除了平衡以外,人们不大能观察到其他东西:如果运动足够快,向平衡的过渡只会持续很短的时间,而平衡原则上是永远存在的.

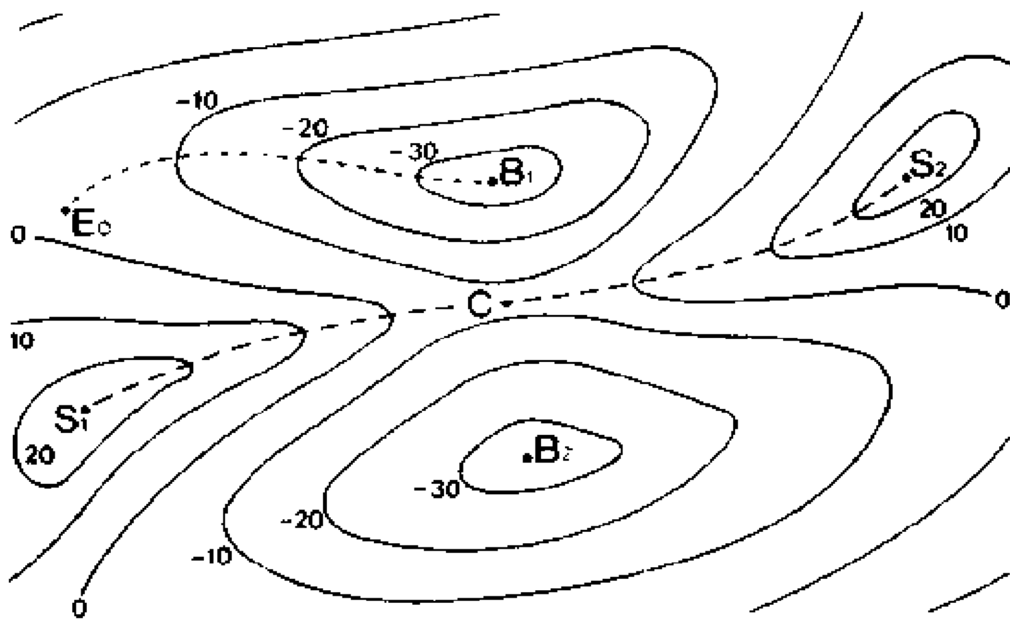


图 25 通过其等势曲线来表示的耗散系统的位势.系统自然地"流"到两个处于盆地底部的稳定平衡 B_1 或 B_2.如果它处于峰顶 S_1 或 S_2,或者处于山口 C,那么它将静止于不稳定平衡.可以描出分隔两个盆地的脊线和一条从 E_0 出发的典型轨线;后者应该与等势曲线垂直.

对于复杂的耗散系统,状态空间的维数会远高于二维:十[104]维,百维,千维,甚至更高.这意味着要用十个、百个、千个独立变量来完全刻画系统的状态.但是我们刚看到的通过水沿地势下流的二维模拟却始终是完美的.这种地势甚至还有一个专门名词,即所谓系统的位势.更确切地说,系统的每个状态联系着一个基点和这个点上的高度;后者是用一个数来衡量的,恰好就是这个状态的位势值.

"水往盆底流,并且在那里滞留不动;"就是这样简单的思想可以表达为下列术语:"稳定平衡是位势的极小点."一个极小值是盆地最低点,而一个最大值是顶峰的最高点.此后,我们将更多地谈论位势,而不是地势:这样说更科学些,而少联想登山运动.代替水沿斜坡下流的说法,我们将说位势沿系统的轨线减少.更确切地说,如果人们在时刻 0 从初始状态 E_0 出发,则以

后的状态 E_t 完全由微分方程来确定. 如果把时刻 t 的位势值 $V(E_t)$ 与后一个时刻 $T>t$ 的值 $V(E_T)$ 比较,则将会发现位势减小,即 $V(E_T)$ 比 $V(E_t)$ 要小. 事实上仅当状态本身在 t 与 T 之间保持不变时,才会有等式成立,即 $E_t=E_T$ 是一个平衡. 这个数学假设有好几个推论;尤其是运动的不可逆转性. 只要运动一起动,它就不断离开初始状态,再也不回头. 事实上,位势只能减少,不会两次通过同一个值. 这就相当于排除了周期轨线的存在性,因为后者将无限多次地通过同一个状态.

耗散系统的例子在自然界中大量存在,一般地说,所联系的位势都有已知的物理意义. 一个力学系统通过摩擦消耗能量,只要这些消耗没有外部能源来补充,这个系统就是耗散系统,其位势无非就是它的能量. 其他的例子多少有点曲折. 比如,经典热力学中,物理系统联系着各种函数(自由能、自由焓、化学势,熵),它们在确定的环境下,都可起着位势的作用. 由此,恰好可导出热力学运动的不可逆转性.

比如,把它运用于气体. 位势将是体积、压强和温度的函数. 平衡是通过寻求位势极小的状态来得到的. 于是我们得到这三个变量之间的一个关系,对于理想气体它将是马略特[1]定律 $PV=RT$,对于实际气体,它将略为复杂. 我们要强调的是,事实上,这个关系仅对平衡有效,而热力学位势原则上是对气体可形成的所有状态而言的,尤其是也对那些不满足马略特定律的状态而言.

然而,那些不满足定律的状态从未被观察过,除非用上特殊的装置. 它们只会出现在极短的趋向平衡的过渡时间间隔,只要人们知道在物理上如何实现一种非平衡的初始状态,即不满足马略特定律的状态. 比如,应该对气体实现局部的超高压或者让气体扩充到额外的体积中去. 同时,这些过渡状态很难恰好用三

---

[1] Edme Mariotte(1620—1684),法国物理学家.——译者注

个变量:压强、体积、温度来刻画,因为这三个变量仅在平衡状态[106]才是均匀的,并且能适当定义.看来应该通过补充变量来更加细致地刻画系统,或者甚至回到波尔兹曼①模型上去,即回到分子的个体运动上去.

这样,隐藏在热力学平衡的实现和稳定中的内在动力学只具有一种虚无的特征.热力学变量对于平衡来说是贴切的,但并非总是如此.热力学位势能很好地给出平衡,但并不能由此引出任何实现非平衡向平衡演化的模型.这是静力学,而无动力学②.

于是我们被带入这样的思想:在耗散系统中,只有平衡状态是重要的,内在的动力学可能被忽视.这一思想是从下列实验事实的简单验证出发的:现实系统将总是在平衡以至静止状态下被观察到的.但是它很难再有所作为.从而建议一种静态可见现象的动力学模型将是合乎情理的.这种模型是通过由上述思想出发的耗散系统来刻画的.顾及到描述向平衡过渡的动力学是不现实的,这个模型的好处还在于所建议的位势似乎只需是一个数学对象而不一定是物理现实.(什么仪器能像温度计测量温度那样来测量熵或者焓呢?)

在热力学中,这些从来都是不重要的,因为人们总能转向其他更加细致的模型来刻画非平衡.但是既不研究为什么一个这样的模型应该是合适的,也不把所提出的位势构建于某种唯象论基础上,就尝试在耗散系统的形式下,对我们不太明白机理的[107]现象塑造一个数学模型,这实在事关重大.人们将限于验证所提出的位势的极小点的个数是否与所研究的现象的稳定形式个数一样,并且在此基础上断定它们互相间的一种模糊的对应.显

---

① Ludwig Boltzmann(1844—1906),奥地利物理学家.——译者注

② 热力学是 thermodynamique 的翻译,原义应该是"热动力学".——译者注

然,一种这样的方法不能大有作为.然而,这种尝试已造成许多牺牲者,尤其是当人们寻求突变理论对人文科学的应用时更是如此;这样的领域中,应该非常谨慎地来肯定位势的存在,因为人们对此既无理论论证,也无实验证实.

突 变

这就是说,能带有一定的现实性来用一种耗散系统刻画的实际系统并不少见.这种数学模型,如果真能完全写出来,那么它将表示为一种支配大量变量演化的位势的形式.这些我们今后称为内在变量的变量确定了系统的状态.如果系统不太复杂,它的完全描述必须要有一定数量的内在变量,它们全部都会在位势中涉及.这里的数学表达对我们来说不太重要:我们只需知道它们存在.位势的极小点就是稳定平衡,系统自然会静止于其中之一的状态下.

现在我们从外部来干预系统.为了说得更确切,假设系统依赖于一定数量的外部参数,而我们干预了其中的两个参数.这两个参数的值涉及位势的表达式,因而改动这些参数也就改动了〔108〕位势,以至使平衡状态移动.

为了理解这点,不妨再来考虑地理模拟.改动位势就是改动地势.人们可以加高或压低山脊,挖深或垫高盆地.于是人们将看到盆地变样,盆底移动.如果盆地被一个湖泊所占据,其位置将随着地面运动而改变.盆地之间的边界也同样会移动,而以前流入某个湖泊的流水今后将流进另一个湖泊.

于是人们会察觉到,这些变化尽管是渐进而又有规则的,却又会表现为突然的现象,至少是在地质年代那样的时间尺度上会如此.如果一个山口封住了一个山间湖泊的盆地,经常能够不断降低高度而对湖泊没有大影响.但是,一旦山口低于湖泊本身的高度,它就再也拦不住水,使得湖泊将消失.在湖泊的盆地和下游的盆地之间的边界随之也不复存在,两个盆地变为一个盆

地.

这样就有一个临界值,它就是湖泊本身的高度.只要不跨越它,山口高度的变化就无关大局.相反,如果山口高度低于它,在这样或那样的意义下,人们就会观察到一个重要变化:一个湖泊的出现或消失.

这种变化就被托姆命名为突变.

我们对一维模型再来细述这点;所谓一维模型就是用唯一的一个内部变量来刻画的系统.如果位势如同图 *A* 所示,则人们看到系统有两个稳定平衡.我们慢慢变动位势;下面的几个图 [109] 就标出了它的几个阶段.一丁点可察觉的变化至多会使平衡的位置移动.但是到了位置 *C*,这是分隔两个盆地的山口抹平的时刻.平衡之一被另一个平衡吞没而消失.由此,系统就只有一个唯一的平衡和一个唯一的盆地.



图 26 变化 $A\to B\to C\to D$ 过程中的小球位置标记为黑球.如果反方向变化 $D\to C\to B\to A$,小球的位置标记为白球.

人们还能对此配上开始时放在上一平衡状态的小球.随着形变的进程,小球几乎不动,一直到这个平衡状态消失(位置 *C*).然后,它就掉到下一个平衡位置,并将在那里保持静止.如果现在向后看,即通过同样的阶段回到初始位势,那么应该注意到,小球并不会回到它原来的位置!这就是说,下面的盆地中的水永远不会出空到上面的盆地中去.当人们回到 *C* 时,小球不会跳到高处,而仍然停留在低处;最终回到 *A* 时,小球位于下一平衡状态.

现在我们能够说,对于一般的耗散系统,什么是所谓突变:

这是在位势的一次连续变更中所发生的一个稳定平衡的消失和另一个稳定平衡的产生.

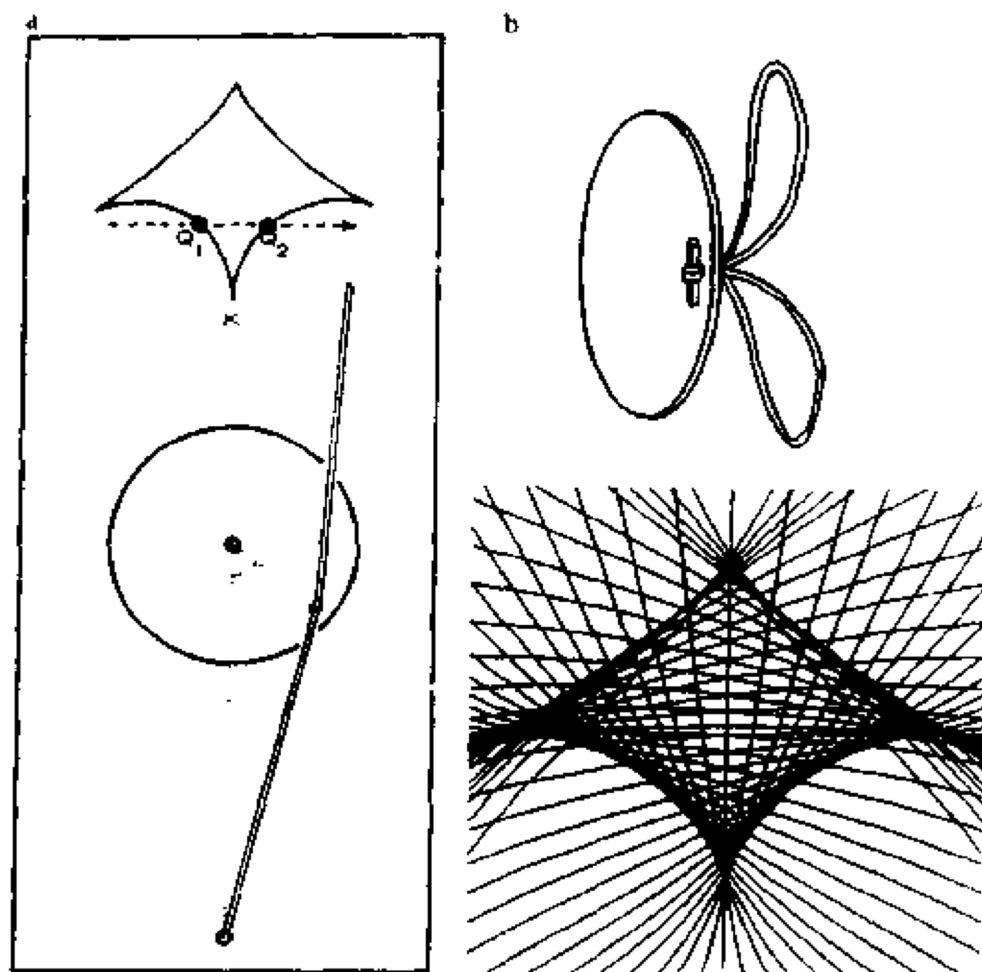
在这一位势变更中我们处理的方式是重要的.这里丝毫不 [110] 需要知道位势的数学表达式,也不需要知道系统的内部变量的个数或属性.人们只要知道它们存在就足够,即人们面临的是一种不必打开的黑箱作业.人们放弃从内部来刻画系统,但将寻求通过系统对外部刺激的反应来描绘它.这是一种能通过外部的刻画,纯属唯象论:系统只不过是由外部世界激发所引起的所有可能的反应全部构成的虚拟现实.

当然,这里并不涉及一切都同时变化.为了应用突变理论,起本质作用的是人们只选择少量的参数个数,一个、两个或三个,使得人们可让它们同时变化,而其他的变量都保持不变.于是这些外部参数的取值可用一维、二维或三维空间中的一个点来表示.如果连续变动这些值,也就是说所代表的点移动,那么系统的位势也以相应的方式发生变动.开始时处于一个稳定平衡的系统随之发生变化.这种变化是连续的,除非这个平衡被另一个平衡吞没而消失.对于参数的一定的临界值,或者说突变值,这样的情况就会发生.在参数空间中它们形成一条边界,跨越这条边界系统就从一个平衡跳向另一个平衡.这一过渡在观察中应该表现为一种不连续性,有时甚至是一种质变,比如相变.

齐曼(Zeeman)构造了一种突变装置.它由一个固定在平板上的轮子所组成,轮子可以绕它的中心自由转动.在它周边的一个点上,固定两条强力松紧带.其中一条的另一端固定在平板上,离轮子足够远,使它始终处于绷紧的状态.另一条则有一个 [111] 自由端掌握在实验者手中,使其能够随意操纵它在平板上的位置.

毫无疑问,系统是耗散的:轮子的位置是描述系统的唯一的内部变量;计算作为位置的函数的位势是完全初等的.我们干脆

假定、平衡是由松紧带的张力来决定的.平面上的一点的位置取决于两个数;因此平板上的自由端所占有的位置也是如此.它们就是齐曼装置涉及的两个参数.参数空间再也具体不过:它们



齐曼装置 左面的(a)代表装置:可动的轮子,固定的下方松紧带、可动的上方松紧带.当在平面上牵引自由端时,可以发现限定四边形的特殊点.比如,如果把自由端由左向右地沿水平线移动,人们将看到当达到点 Q_2 时,轮子突然转动半圈.如果从右向左作相同的行程,则将是在点 Q_1 上,轮子将跳动.点 K 是一个皱褶点.

右面的(b)表示怎样把松紧带联结在轮子上,并且指出突变点限定的四边形,后者是用计算机画出的(泊斯通(T.Poston)和伍特科克(A.Woodcock)).(齐曼(E.C.Zeeman),《突变理论》,阿迪孙—威斯雷(Addison - Wesley)出版社,1977.)

[113]

就是平板.使参数变更就是意味着牵引平板上的自由端.

如果人们实现了这一装置,那么很快就会发现存在一个奇异地带,它是顶点被削尖的某种四边形.如果人们从四边形的内部越过边界到了外部,那么就能观察到一个突变:一直顺从地追随运动的轮子突然转向,并且转动半圈之后重新处于新的平衡位置.

我们请读者自行来精心制作这一装置.读者将会信服,在四边形内部的每个点上,对应轮子上两个可能的平衡,而在外部,则只有唯一的一个平衡.在模棱两可的情形下,轮子的位置不仅取决于自由端所在地点,也取决于它为达到所在地点所经历的路径.比如,如果让它一步、一步地穿过四边形,然后再让它亦步

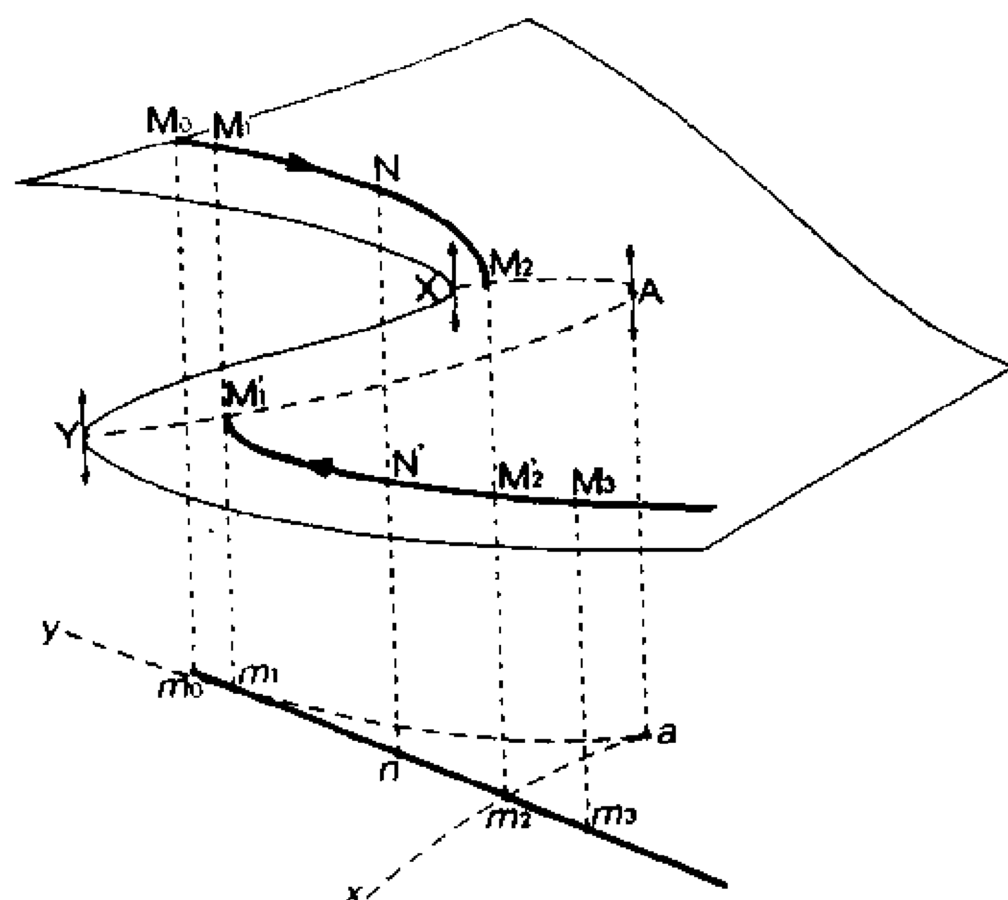


图 27 皱褶点:怎样穿越它.

[114]

亦趋地回来，并且小心翼翼地使它恰好通过同样的点，那么轮子并不回到原来的位置.这样，系统的响应不仅取决于参数现在的值，也取决于它们以前的值.

齐曼装置是只有一个内部变量的耗散系统，其中人们可以 [112] 通过两个外部参数来对系统起作用.值得注意的是，对于最复杂的耗散系统，只要同时只涉及两个参数，其主要的现象就已经在此.突变理论提供了这种状况的一般模型：这就是皱褶点.

这样的图形现在已很有名.一叶自我皱褶的曲面投影在一个水平平面上.皱褶终止于皱褶点 A，其水平投影点 a 对所出现的投影轮廓线来说是一个尖点.投影轮廓由两条半曲线 ax 和 ay 所组成，它们都是在曲面上描出的同一条曲线的水平投影，这条曲线垂直相切于 A 点.弧 AX 限定了曲面的上叶，弧 AY 限定了曲面的下叶，两叶交会在点 A 上.

水平平面是参数空间.在所考虑的系统的大量内部变量中，我们只选出其中之一作为最有意义的变量：这就是我们的图形中的第三维.于是皱褶的曲面就代表系统可能的平衡集合；我们由此选出在上下叶之间、由代表不稳定平衡的曲线 XAY 限定的部分.这样，基平面上的每一点对应其上的曲面上的一个或两个点.这意味着每对参数值对应一个或两个平衡.基平面上面的点的高度给出所设定的变量的值.

现在人们可以使参数值发生变化，这就是说，牵动代表点 m.我们从对应无异议状态 M_0 的初始位置 m_0 出发，向边界 ay 移动，其中我们顺利地通过点 m_1.状态随之运动，在点 M_1 处跨过弧 AY，并且在上叶连续变动.如果现在点 m 比如在点 m_2 处跨越边界 ax，状态 M 不能再连续随动，但是应该落到下叶上，[115] 从 M_2 变到 M'_2.先前的平衡消失，而状态被另一个平衡所收容.由此出发，又回到无异议区域，状态顺从地随着参数的变化而变

进行选择.第一条是绕过尖点,避免穿越边界:这将观察不到突变.第二条是重新通过皱褶,但是沿另一个方向.这一次,边界 ax 被不知不觉地越过,而在通过 ay 时才发生突变,状态跳到平衡曲面的上叶.人们将注意到,在皱褶的下部,即包含在 ax 和 ay 之间的区域,系统的状态将极为不同于它曾经走过时的状态.

在诸如 n 那样的点上,系统有两个可能的状态 N 和 N'.为了消除模棱两可,应该明确沿着哪一条路径到达点 n.图 27 把它表示为两个点,导致在 N 上有一点,在 N' 上有另一点.这是一种滞后现象:系统作为其历程的函数来决定.当前条件不能决定其响应,但是它有多种选择.根据过去的经验,它会选取其中之一.

理　论

在两个外部参数情形下的突变理论告诉我们,如果人们通过其他参数不变,只变动两个参数来处理一个耗散系统,突变值将聚集在两参数平面上形成皱褶.论述纯粹是唯象学的:变动参 [116] 数值,然后注意使系统从一个平衡跳到另一个平衡时的值.这样的值可能一个也没有,也就是说,在整个试验区域中,系统连续地随参数变化而变化.但是如果有这样的值,它们将连成一些曲线(皱褶),曲线可能自交叉,并且包含一个或几个皱褶点.比如,齐曼装置描出了四个皱褶点.

理论并不精确给出突变曲线的形状.在此意义下,它是定性理论.它仅仅是排除了更为复杂的局势.比如,可以想象,突变值是一些孤立点,或者相反,存在一个平面区域,其上的点全是突变点.

理论断定,一般来说,不可能如此.

请注意这个"一般来说",这是理论的致命之处①. 理论的结论并非是对于所有耗散系统都是成立的,而只是对其中的极大多数. 完全可能构造一个不满足这些结论的特殊系统,而且其突变值并不连成曲线. 理论只是简单地断定,如果人们能够进入系统,并且稍许改动一点方程,那么就仍然能使一切就绪. 换句话说,一丁点来自内部的小扰动,就足以重建一般模式,并且使理论预言的皱褶出现.

不言而喻,我们更习惯于研究对我们来说给定的方程,而不是随心所欲地去改动它. 大自然给我们提供了系统,它不会为了讨好我们去修正系统的位势. 另一方面,如果几乎所有的位势是合适的,那么我们也不知为什么大自然非要刚好把系统选为逃[117] 脱突变理论的那一个. 如果正是如此,那就应该有个物理原因(隐蔽的对称性,未知关系)值得去发现. 在此基础上的争论可能是没完没了的;它已延续一二十年,我们还有机会来回顾它.

理论对于三个(甚至四个、五个、六个)外部参数情形都有类似的陈述. 参数空间这时就是通常的三维空间,突变值应该描出一些曲面,它们应该是下列三种类型之一:

——燕尾;
——双曲脐点(波浪);
——椭圆脐点(毛发).

括号中的形象化名称来自托姆,只需对它们的图象看一眼就可体会到言之有理.

对于双曲脐点,只需取出其中一叶;其他部分只要联想其由此涌起的波浪.

---

① 原文作"阿其利(Achille)的"脚后跟". 阿其利是古希腊神话中的勇士,他的全身除了脚后跟以外都是永生的.——译者注

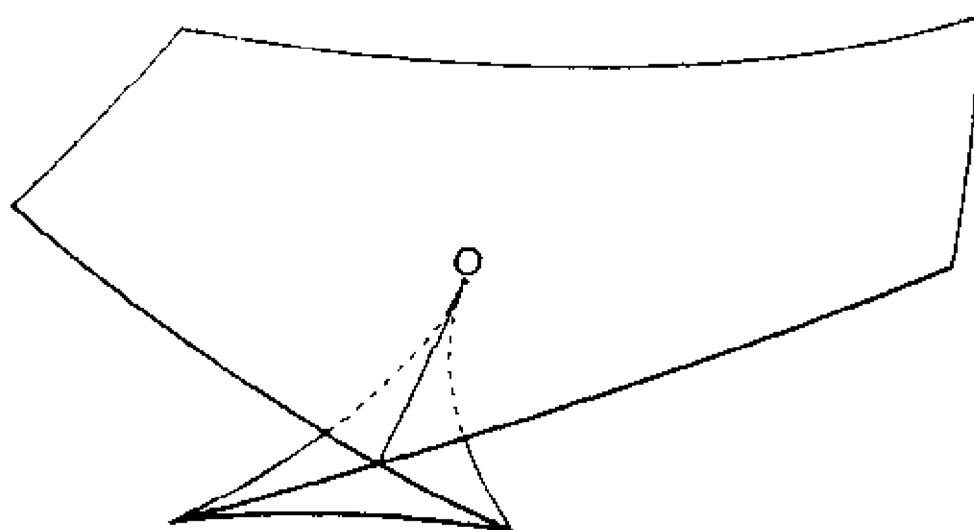


图 28 燕尾.

[118]

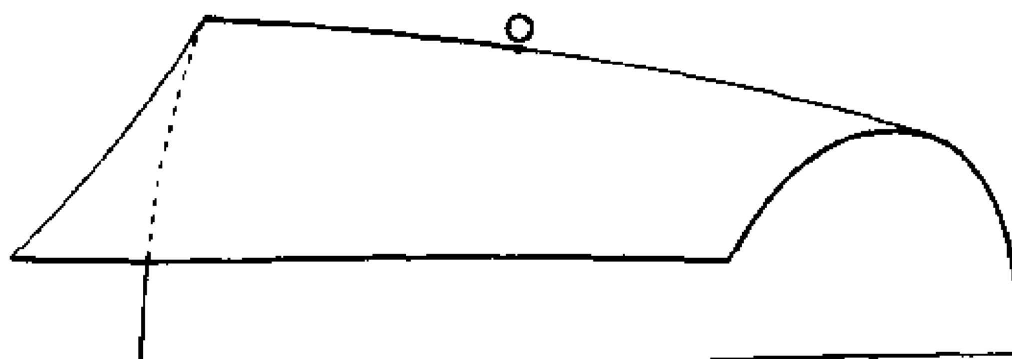


图 29 双曲脐点.从 O 点出发,截面折叠(涌起波浪).事实上,为了得到一个完整的脐点,需要在这个图形中加上关于中截面对称的部分.

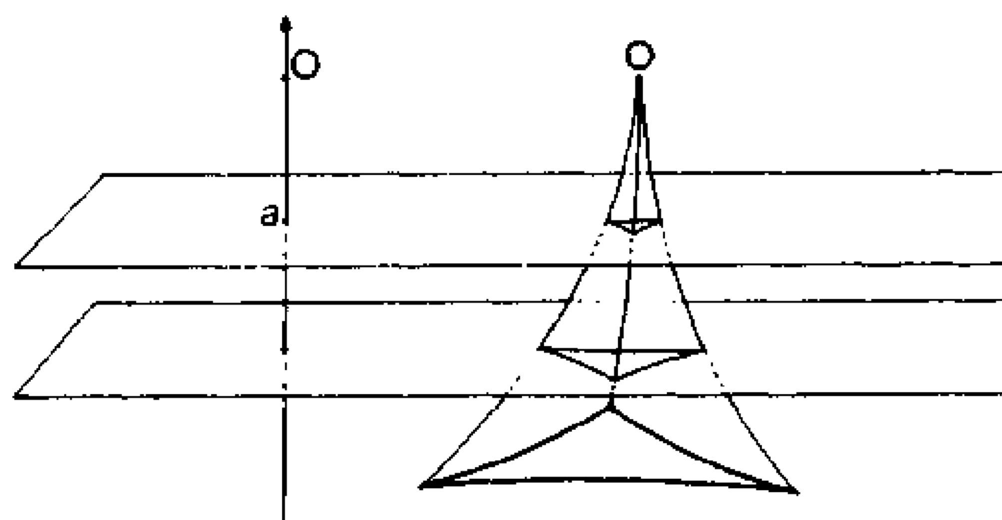


图 30 椭圆脐点及其某些截面.

[119]

这些"初等突变"有类似皱褶的性质.比如,我们观察燕尾.其边界仅在一个方向上可以穿过,并且限定出现零个、一个或两个平衡的区域.两条交叉的脊线所围成的内部区域中有两个平衡.

这些图形已经显露出(并且解决了)突变理论内部的矛盾.事实上,我们有机会落入一个处于三个参数 p_1, p_2, p_3 作用下的耗散系统,其反应方式是椭圆脐点型的.在三维空间 (p_1, p_2, p_3) 中的突变值,于是形成一个类似图 30[①]那样的曲面.

现在我们把第三个参数固定为一个适当的值.比如, $p_3 = a$,并且令另外两个参数变化.突变值将是脐点周围的曲面与高度为 a 的水平平面的相交处.图形有三种可能;可以证实,如果 $a = 0$ 是参数 p_3 的值, (p_1, p_2) 的突变值归结为只有一个点,即脐点周围的曲面的顶点.但是,如果只让 p_1 和 p_2 变化, p_3 是固定的,那么就只有两个参数在对系统起作用,理论告诉我们,应该观察到镶有皱褶点的皱褶,而没有孤立点.

回答是这类断言仅在一般情况下成立:如果它对于一个特殊系统是错的,那么只需稍微扰动一下,它就恢复正常.如果固定 p_3 为零,那么将与二维的突变理论的结论矛盾.但这无妨大[120]局.稍微改变一下试验条件:把 p_3 固定为一个不为零的小值 a. $p_3 = a$ 的截面,即新的突变边界,就不再是一个点.它还可退化为乌有,即,对 $p_3 = a$ 不再有突变值.它也可以由三个唇瓣来组成,其联合处都是皱褶点.在这两种情形下,对于二维所作的预言都将被证实.

在这里,有趣的是如何使三参数理论包含二参数或单参数理论.如果用一个平面来相截(即如果只同时研究两个参数),那么一般得到一个由皱褶组成的截面.在此意义下,人们将说,椭圆脐点的交叉脊线就是一些皱褶点.如果用一条直线来相截(即

① 原文作 29,有误.——译者注

只有一个参数同时变化),在这条直线上一般只有孤立点.沿着直线跨越这些点,就会使一个稳定平衡消失(或产生).这就是所谓折叠,即一维初等突变.椭圆脐点附近的曲面上除了脊线和顶点外,都是折叠点.

最后一点,通过简单地改变度量外部刺激的方式,可以人为地变动突变边界的性态.比如,取较大的单位,就会改变名义值,使图形缩小.更复杂的参数改变就会造成更可观的形变,一个平面会变成一叶(无脊线)光滑曲面,一条直线会变成(无角点)正则曲线.但是人们将总能辨认出初等突变来.参数改变,不管它多么复杂,不可能使没有燕尾的地方出现燕尾,也不可能使一个 [121] 燕尾消失.它们可能拉伸、压缩、弯曲,但是没有折叠.

与公共传闻相反,我们看到,突变理论并不先验对整个实验带来今后的知识.即使一个很好的耗散系统,其三个参数我们都掌握在手,我们仍然不知道将有一个燕尾、一个椭圆或者双曲脐点,一些皱褶点、一些折叠点或者其他什么,试验以前(或者计算以前,如果我们知道位势),什么也不知道.即使人们揭示了一个燕尾,理论仍然不能预言它的位置、它的大小以至它的精确形状.

那么突变理论究竟给我们带来什么?它是通过对少量特征明确的刺激的反应,从外界来研究复杂系统的思想;它使人注意到某些从一个平衡跳到另一个平衡的现象,这类模棱两可的、滞后的现象在一些决定性系统中出人意料,但又非常普遍;最后,这还是一种概念框架,由此人们可以把实验结果分类,可以有七种几何图形(我们只提到五种)① 与每类相联系,并且在大自然中被确认.

---

① 另外两种是四维突变:蝴蝶与抛物脐点.——译者注

评 论

突变理论是近年来科学生活中最引人注目的篇章之一.当年人们盼望已久的勒内·托姆的著作以平淡无奇的标题《结构稳定性和形态发生学》于 1972 年发表;这使托姆立即被推上国际[122]报刊的明星位置,却没有顾及他在其数学同行中更加精深的领域上早有的声誉,其标志是 1958① 年的菲尔兹奖.与此同时,克里斯多夫·齐曼把理论应用于从心脏跳动到监狱骚乱的名目繁多的研究课题中,其足迹为他带来的是毁誉各半.

曾经有过一些使人啼笑皆非的时刻.某些突变论者不顾一切地把实验数据排成皱褶,而用无偏见的眼光看来,它们形成的更像是一片云,而不是一条线.至于我,我欣赏苏斯曼(Sussmann)的格言:"数学上,名词是随意的.每个人都可自由地把一个自伴算子称作'一头象',把谱分解称作'一个长鼻'.于是人们就可证明一条定理:每个象都有一个长鼻.但是人们无权就由此深信这个结果与那种灰色大动物有瓜葛."确实,从"突变"开始来选取的词汇就已带有倾向.

现在,论战已平息.人们可以试图得到一个明智的判断.第一个可作的注记是:突变理论的存在是因为缺少其他高见.托姆曾一呼百应地呼吁一种可应用于比耗散系统更一般的动力系统的更一般的理论.一种这样的理论应该能描述不同于"一个稳定平衡因另一个平衡而被破坏"那样的"突变".一个非耗散系统不再在平衡状态上静止:它可以在一条周期轨线上无限环绕,或者在一个奇异吸引子上周游.在这些不同的可能性之间的转移将[123]是真正的"突变".

人们离开一种这样一般的突变理论还非常遥远.唯一清楚

① 原文作 1962,有误.——译者注

的是依赖于一个稳定平衡的周期轨线的形成(霍普夫①分岔).甚至令人怀疑的是能否有朝一日存在一种这样的理论;至少它不会导致一个如七种初等突变那样简单的目录.人们已经在说,对于一般的突变,有一份无限的模型清单,尽管人们对它们只了解其中的几个.

今天存在的突变理论,在很长时期内,仍是我们用来描述外部参数对动力系统影响的唯一工具.它只能用于耗散系统,并且还是在人们从来都搞不清是否都满足的一些条件下.约束是如此苛刻,可靠的例子并不常见,除非专门去制作一个装置.从严格的科学观点来看,这是一种寻求应用的理论.

但是托姆的计划与其说是科学的不如说是哲学的.在他的书中展开的论题是突变理论描述的形状,特别是七种初等突变是可用其组合重建自然形状无限变化的要素.托姆写出了当代的《蒂迈》②;相隔两千年以后,他对下列伟大宣言作出反响:“出于完全的理性和完全的真实性,正四面体是火的元素,正八面体是空气的元素,正二十面体是水的元素”,正方体留作土的元素,而正十二面体是宇宙的图形.

正是这五种正多面体,自古希腊以来,构成了我们对空间的领悟的几何基质.直至今天,我们还想象不出比正方体更好 [124] 的占据空间的方式.堆积正方体的行动并非只是一种儿童游戏,这也是生成欧几里得空间的行动,它无非是可以无限循规的可能性.它在著名的经典物理的绝对坐标中,把整个牛顿宇宙笼罩网格,而完成其伟绩.至于艺术自身从来都没有对多面

① Eberhard Hopf(1902—?),德国数学家.——译者注

② Timée de Locres(英文记作 Timaeus,又译“蒂迈欧斯”)是公元前5世纪的古希腊毕达哥拉斯学派哲学家.他对柏拉图有很深的影响.《蒂迈》是柏拉图的论述自然哲学的对话集.——译者注

体几何无动于衷：绘画中的立体主义，及其致力于在立体翻滚中重现多面体架构，不过是这一永恒的思虑的最具戏剧性的神化.

托姆所建议的正是对我们的直观知识的一种复兴，或者至少是一种丰富．在他的世界中，正如在柏拉图的世界中，非几何学家不准入内．他们两人都是以他们掌握的数学手段来探索当代的科学大问题，对于柏拉图是宇宙学问题，而对于托姆是生物学问题．柏拉图认为，造物主构造万物只需五种正多面体；而托姆则认为，大自然讲述一种以七种初等突变为词汇的语言.

托姆的哲学的中心假设是对每种自然客体联系某种动力学．出现在观察者面前的形状无非就是联系其自然客体、占据参数空间的系统的突变的边界．托姆及其理论在这里所体现的惊人的柏拉图主义外观，丝毫不要求这一动力系统有一种物理实在．人们或者可以在观念上拒绝它，或者可以由此看到与大脑的神经结构相联系的我们的悟性的一种先验的范畴，正是这[125]样，比如，海滩上汹涌的波涛形状就会联想双曲脐点；但是在这一比拟中，没有任何流体动力学的理由.

一种这样的假设在生物学领域中看来比物理－化学领域更难证实．我们容易设想，活性物质是无数联立变换的永恒舞台；这些联立变换，尽管它们处于对观察尺度来说不可见的状态，但仍能或多或少地确定它们在每一点的性质．长期以来，为了刻画形态发生学，即从卵子到胚胎的形状演变，生物学家们引进形态发生位势假定．这样人们或许可以对突变理论假设的耗散系统指派一种物理－化学实在．一旦出现区分两种组织的边界，人们就可从中辨认出一种折叠型的突变．它可划出一道条痕，蜕落一层外壳，生成一簇细毛，这些情形应该分别会使人想起皱褶、燕尾和椭圆脐点.

我们还有最后一点需要强调：时间的作用．当然，数学家

会满足于说时间就是第四个参数 t，而其他三个参数是空间坐标，以至只需讨论四维空间中展开的突变．而物理学家或生物学家观察到的并非是这个时空，而是 t 为常数时的截面；并非是这个壮观的四维突变，而是三维突变的接连延续出现．

然而，存在两种四维初等突变：抛物脐点和蝴蝶．它们在常数 t 时的截面，根据严格的规则，由燕尾、椭圆脐点和双曲脐点组合而成．谁不了解它们，谁就不能辨认中心组织导体，[126] 而只能简单地看到形状在空间中无明显规则的产生、变化、消亡．谁了解它们，谁就掌握这一历史的关键，这一演化的走向：他看到形状在按与执矛骑士四方列队同样严格的规则跳起芭蕾舞．

如果人们通过中心用一个平面截开一个燕尾或者一个椭圆脐点，那么人们会看到一个简单图形，点或曲线．如果再移动这个平面，那么图形就变得多姿多态，彻底揭示出一种隐藏的复杂性．这样，一种形状在空间中的延续变化，可以理解为一个单一的时空中的形状，人们由此可观察到在 t 为常数时的各个截面．一个时空的突变表现为形状的展开，或者相反，形状的折叠，一个在 $t=0$ 时被观察的相对简单的形状，在以后的时刻中会变成相当复杂的形状．托姆在胚胎发育中，特别是在卵子分裂的各个阶段（囊胚、原肠胚、桑椹胚）中，看到了这一过程．由此他看到了形态发生的数学模型，胚胎从一个简单的胚芽出发通过逐次变更而形成的构造，离心过程；而一种向心过程将是在一个共同的基础上，不同的原生物质组合装配为一些器官．

突变理论是对世界的一种观念．这种观念由来已久，它是与赫拉克利特一样的观念．对于赫拉克利特来说，斗争、矛盾是一切事物之父，并且他看到世界就是一个对立面相互对峙的无休止变化的舞台．突变理论在今天将此表达为任何形状是吸引子冲突的结果．就其根本来说，人们发现了一种犹如创世日

那样纯真无暇的观念．这是一位伟大的学者的壮举，他不仅重
[127] 新发现了这种前苏格拉底①、前科学的世界幻象，并且使我们与之共享．“最后．被认为科学上有意义的现象的选择无疑会有很大的任意性．当代物理学为显示持续时间不超过 10^{-23} 秒的状态建造了巨大的机器．企图通过使用所有可操作的技术手段，来对所有实验上可接受的状态进行整理，决不会有错．然而，人们可以合理地提出一个问题：有多少习以为常的现象（从不再引人注意的观点来看）却来自艰深理论？比如，古老城墙的裂缝，飘荡云彩的形状，一片枯叶的凋落，一杯啤酒的泡沫……谁会知道，对这类微不足道的现象作少许数学思考，最终将对科学更加有益？”

如果我们不再跟着托姆在哲学大地上游荡，那么突变理论还会剩下什么？它直接带给科学的具体贡献，正如我们已经看到的，是无法与它所激起的期望以及它的鼓吹者们的诺言同日而语的．其原因毫无疑问是在于，最终，在自然界中，真正的耗散系统是罕见的，极大部分的动力系统要复杂得多．

余下的是，它使人对科学知识中产生的质变现象睁大了眼睛．这是许多将来的模型的原型，尽管是数学的，却是定性的．这同样是重返几何学，图形对计算的报复．

所有这一切都出于一个在上章中已作冗长分析的中心事实：执行某些计算的不可能性，以至认识某些系统的不可能性，
[128] 尽管其动力学是决定性的，但是过分复杂．面对这样的证词，就要树立一种定性知识是可能的思想，这种知识并不是用来预料现象，而是列举现象．

这就是突变理论在一个令人遗憾的、过分狭窄的领域中的

① 苏格拉底（Socrate，公元前 470—399），古希腊哲学家．相传他是柏拉图的老师．“前苏格拉底”在这里是指系统哲学思辨以前的观念．——译者注

作为.限于所有动力系统中最最简单的耗散系统范围内,它给出了决定性系统的一个内在数学模型,人们将以此来形容创造者的意愿:它们不再回复(滞后),它们形状早定(形态发生).

它在进行这些时排除了时间,把时间从它所建造的大厦中驱逐了出去.建筑师关闭了他的建筑.时间老人滞留在外,只有他的塑像正襟危坐在那些空旷冰冷的宫殿里.

时间在突变理论创立的第一分钟就被赶走,因为理论决定只保留耗散系统的平衡状态,而不保留系统的演化.动力学被归结为静力学;耗散系统的动力学尽管贫乏,其蕴藏的有趣现象却并不少见,热力学就是一个明证.时间老人后来又被作为时空的第四维而请回,而时空又被作为展开一个突变的场所.

这一几何形象是一种不可逆转和转瞬即逝的时间的固定反映,它使人想起另一个几何形象:开普勒椭圆.托姆的初等突变就像开普勒椭圆,是把时间禁锢在空间中、并且用几何把它锁住的意向.正如开普勒用希腊人传下的数学工具来架构那样,托姆得益于现代拓扑学.前者用的是阿波罗尼的《圆锥曲线论》,后者用的是函数的奇点理论.

然而,被牛顿在数学上演绎的开普勒模型完成了一个封闭的宇宙,一个以明显的方式囊括整个过去和整个将来的包罗万象的现在,一个对善于计算者来说毫不足奇的世界;而突变理论看到的是一个开放的宇宙,其中数学家在鉴赏和区分形状;他像蝴蝶搜集者那样,在其行程中偶有所得,就会不亦乐乎.

[129]

[130]

第4章　结束与开始

这里已到达我们的旅途终点.我们从托勒密的宇宙出发,这是一个圆周运动的既复杂又精细的布局.我们看到这一构造与时间一联系就变得混乱而脆弱,以至与椭圆轨道和开普勒三大定律的简单明了相比被人们所抛弃.于是牛顿宇宙的黄金时代开始了;这一宇宙直到其细微深处都是由引力定律来组织的.这是一个完全透明的时代:时间嵌入了空间,过去和将来都被记录在当前瞬间中,就看你会不会解读.多亏牛顿定律,行星在其轨道上的运动被归结为椭圆的几何性质.

在今天作为牛顿宇宙学的直接继承者的广义相对论中,人们再次发现这一观点.爱因斯坦引入了四维时空,其几何性质是通过一种运动表象来对只能同时看到三维的我们演绎的.诚然,从牛顿到爱因斯坦,人们从三维到了四维,时空的曲率比研究圆锥曲线的几何远为复杂.但是宏图是一样的:时间归结为空间,[131] 运动代替为几何.这些都是被一种严格的决定论支配的封闭的宇宙,其中时间的流逝从未带来新事物,一切人们都早已知晓,古往今来都不出人们预料.

庞加莱的批判和现代动力系统的成就已经指出这种构思的不足.他们的分析留给我们的形象是完全不可预料的时间,以及时间变为坚韧不拔地拒绝把自己禁锢在当前的彻底革新者.模型极为具体,面包师变换向我们指出一种这样的时间构思是与决定论的规律相容的.即使在最为狭窄的牛顿天体力学中心,人

们也能使现象显得更像是掷骰子,而不像在开普勒运动的美妙规律之下.面对这种势态的观察者,就像站在波涛翻滚的大江边,他会力求记载瞬时万变的状态.

这里是一个开放的宇宙,其中时间是不可俘获的.人们可以重温赫拉克利特的警句:"没有人能两次渡过同一条河."但是尽管到处都是时过境迁,人们仍然试图抓住某些形象,仍然能够辨认某些被水流带走的形状,并把它们保留.其实我们所有人都这样做,因为流逝的时间留给我们的只是一些散乱的记忆,有时还是无意识的.而在另一个领域内,这正是突变理论试图做的.某些非常特殊的动力学结晶为皱褶、脐点或蝴蝶,而专家知晓如何在变化的洪流中识别这些形状,尽管他不能解释它们的发生或者预见它们的过程.

我们就这样在行程的终点求助于几何学的重放光芒.初等[132]突变就是一些几何图形,它们概括了某种躲躲闪闪、寒酸可怜的动力学.几何学在这里的角色远不如在牛顿或爱因斯坦的宇宙学中那样雄心勃勃.人们并不要求它提供一个包罗万象的时空实在的整体模型,而只是一种用来识别某些局势的框架,这种局势中动力学已在静力学面前屈服.归根到底,这是一种力不从心的见证.

数学在时间的两种观念之间游荡.一种自然地演绎为几何语言的观念是整体观念,其中当前召唤未来,响应过去,就像最遥远的星系通过牛顿引力而影响到这里的分子运动.另一种观念在时间的流逝中看到状态的延续,这些状态在大尺度上是独立的,使得过去的痕迹很快就变得模糊不清,并且在每一时刻总带来一些对以前而言根本上是新的东西.

时间的真正本性超出了数学,而数学只能在这两种极端之间走钢丝.此外,它们的对立并非是新的,并且大大超出了科学的范畴.对于我来说,我从中看到一对对立的诗篇《伊利亚特》和

《奥德赛》[①]所形成的最激动人心的景象. 读者或许能接受在本书中引证一些铭刻在世世代代人们心中的篇章.

《奥德赛》的从头到尾中时间都浑然一体. 当前呼唤将来,参照过去. 未来被憧憬向往,过去在制约当前.

[133] 整部诗篇紧扣俄地修斯[②]的"回返"(νοστίμου ἦμαρ),深切盼望的回返日总被期待着,而二十年来从未实现. 在诗篇的若干开场诗句以后,俄地修斯:

> 一心企望眺见家乡的炊烟,
> 盼愿死亡.[③]

由于这一回返,忒勒马科斯[④]到普罗斯(Pulos,Pylos)去向奈

---

① 这是公元前6世纪的古希腊诗人荷马(Homeros)的两部史诗.——译者注

② Odusseus,《奥德赛》的主角. 在法语中,习惯上对古希腊的人名、地名都有其独特的译法. Odusseus 在本书中按法语常规译为 Ulysse,按发音应译为"于利赛",对中文读者来说,很难连得上"俄地修斯". 由于历史的原因,古希腊的人名、地名的中译很不统一,有时从法译,有时从英译. 例如,荷马就来自法译 Homére;如果从英译,似乎就应译为"荷美洛斯". "俄地修斯"是陈中梅的《奥德赛》和《伊利亚特》的中译本(花城出版社 1994 年版)中的译法. 以下我们也将参照这两部中译本来翻译本书中引用的一些故事和诗句. 在这两部中译本中,我们前面提到过的古希腊勇士阿其利,根据英译就被译为"阿基琉斯(Achilleus)". 但在数学界,由于著名的芝诺(Zeno)悖论,人们都知道有个"阿其利追乌龟"的故事. 因为这个故事也是先来自法译,所以后人就没有再把它重译为"阿基琉斯追乌龟".——译者注

③ 译文取自《奥德赛》中译本第3页.——译者注

④ Telemachos,Télémaque,俄地修斯和裴奈罗佩(Penelope,Pénélope)之子.——译者注

斯托尔[1]打听，到斯巴达(Sparta，Sparte)去向墨奈劳斯[2]打听．当俄地修斯最后在法伊阿基亚人[3]处出现时，是为了询问回归的途径．荷马在俄地修斯对死者们的访问的最有魅力的时刻，中断他的叙述，刚好在阿伽门农[4]说话之前，他说，“全场静默，肃然无声，惊迷于他的叙告．在整座幽暗的厅殿．”[5]就会使人重新想起本质在于：

我的启程在你们的手中，以及众神的手中．

这回返的日子，俄地修斯从未看到：这是在一个晚上，他将在睡梦中到达伊萨克(Ithaka，Ithaque)，法伊阿基亚向导把他放在沙滩上，在那里，他到第二天的早上才苏醒，周围堆满了他的行装，以至都认不清他的故土．一次为了隐藏法伊阿基亚人的礼物，俄地修斯被雅典娜[6]装扮为乞丐，而装运他的船以及船员都被波塞冬[7]变成了岩石，以至这一“回返”没有留下任何痕迹，回返仍然是不可接受的庄重的象征：什么也不能抓住顷刻流逝的未来变为过去的瞬间．

就这样，“回返”的誓言甚至在俄地修斯实际上已经回到伊萨克以后仍在遵行．通报的迹象被重复，预言也一样：最后的预

---

① Nestor，普罗斯国王．——译者注

② Menelaos，Ménélas，阿伽门农(Agamemnon)之弟，海伦(Helen，Hélène)之夫．——译者注

③ Phaiakians，Phéaciens，阿尔基奴斯(Alkinoos，Alcinoos)的臣民．——译者注

④ Agamemnon，进兵特洛伊的希腊联军统帅．——译者注

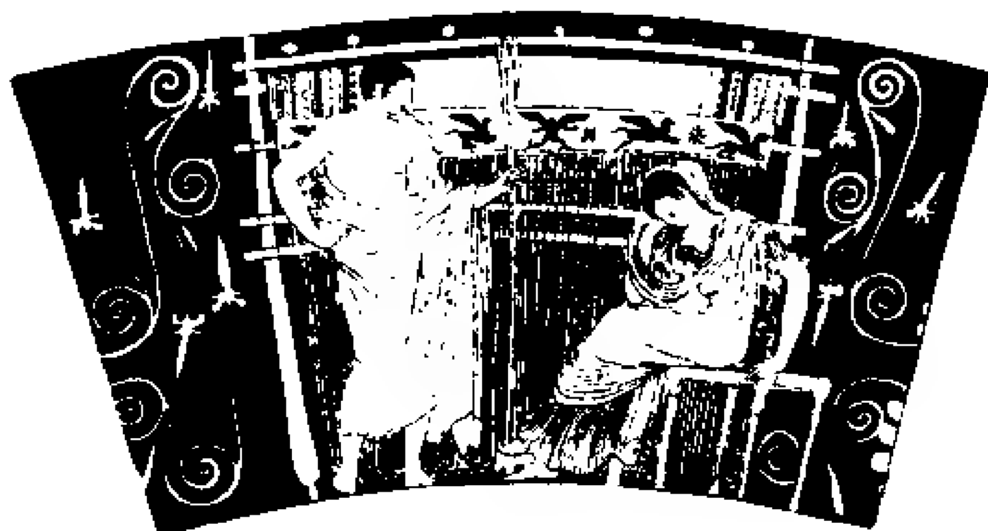
⑤ 译文取自《奥德赛》中译本第206页．——译者注

⑥ Athene，Athéna，宙斯(Zeus)之女．——译者注

⑦ Poseidon，Posédon，宙斯的兄弟，镇海之王．——译者注

言是塞俄克鲁墨诺斯[1]的幻象，在事情发生前的一刻，宣告对求婚者们的杀戮.俄地修斯的回返就像裴奈罗佩织布那样，从未完成过，而人们总以为他快完成了.此外，在诗篇中，裴奈罗佩织布的完成重合于乞丐的到达，并以弓为证，使得消灭求婚者和俄地修斯确定的回返成为可能.这就完全证明，在这块布与这一回返之间有一个类比：一个是另一个的映象.裴奈罗佩织布从未完成，俄地修斯的回返也就从未完全实现.当永远放弃在某一个接近的将来的参照点时，事业就趋向未来.

[134]



裴奈罗佩在进行其伟大的织艺，一边在与她的年轻求婚者之一安提努斯(Antinoos)谈话(特殊收藏品).

但是事业也趋向于过去.特洛伊(Troy，Troie)已被占领和洗劫了十年；但是幸存者奈斯托尔、墨奈劳斯、俄地修斯本人与鬼魂泰瑞西阿斯[2]、阿伽门农、阿其利(阿基琉斯)一起，根据他们的意见来确定生者的行动.以阿伽门农为例，他被克鲁泰奈丝特

① Theoklumenos，Théoclyméne，出身于占卜之家.——译者注

② Tiresias，Tirésias，盲占卜者.——译者注

拉[1]和埃吉索斯[2]在他回到阿耳戈斯(Argos)时所杀,因而他鼓动俄地修斯对所有人,甚至对裴奈罗佩,都要谨慎.正是死去的占卜者泰瑞西阿斯,向俄地修斯预言,他将杀死所有求婚者.而 [135] 我们不要忘记,在伊萨克或在阿尔基努斯[3]处多处出现的有关特洛伊战争的英雄的战绩的行吟诗人的赞歌,就这样在挥笔画出一卷展现历史事件的巨画,使事件的角色们都成了一种传统的继承者.

在这过去的永恒及其影响中,裴奈罗佩是最引人注目的象征.她成为忠实的偶像.成为表明过去既不会逝去、也不会变为无能为力的回忆、而能继续影响今天的标志.这可能也得益于俄地修斯的弓,另一项被遗忘在谷仓深处的过去的遗迹,后来变成复仇的武器,使俄地修斯最终回返的手段,打开"回返"之门的钥匙.先是需要俄地修斯在一去特洛伊20年之时,留下他的弓;这是一种先兆的姿态,因为他完全不知道这将有什么用.再是需要裴奈罗佩有配合的念头,使她面对不怀好意的求婚者,毫不犹豫地把这可疑的武器交到俄地修斯手中.

过去与未来互相呼应:一方是另一方的映象.在它们之间,当前消失了,就像"回返"降临于俄地修斯时是在他昏睡之时那样逃逸了.在《奥德赛》的开始,雅典娜就已向忒勒马科斯预言俄地修斯的回返和求婚者的死亡:

> 但愿俄地修斯,如此人杰,出现在求婚人面前——
> 他们将找见死的暴捷,婚姻的悲伤![4]

---

① Klutaimnestra, Clytemnestrre,阿伽门农之妻,埃吉索斯的姘妇.——译者注

② Aigisthos, Égisthe,克鲁泰奈丝特拉的姘夫.——译者注

③ Alkinoos, Alcinoos,法伊阿基亚人的国王.——译者注

④ 见《奥德赛》中译本,第10页.——译者注

这就是在《奥德赛》中的必然性的宇宙.一开始就已摊牌;史诗的展开将是显示所有各处宣告的不可阻挡的实现,并且被如此享有盛誉的情节所肯定.著作的不同部分把它们一场一场地[136]以至全部展开.作者荷马本身在《奥德赛》中也有其化身:这就是行吟诗人菲弥俄斯(Phemios, Phémion)、德摩道科斯(Demodokos, Démodocos),他们征服了在场者们的心田,催落了主人公们的泪水.

在这个宇宙中,过去与将来在永恒的当前中混为一体.它们是不可分隔的:忒勒马科斯去普罗斯和斯巴达打听他父亲回返的消息,他在那里遇到奈斯托尔和墨奈劳斯,后两人向他讲述特洛伊战争的回忆.更有甚者,过去的端点与将来的端点重新联结.这就是塞贝(Thebe, Thébes)的先知泰瑞西阿斯;他在远早于特洛伊战争的神秘时代就已去世,但向俄地修斯宣告在求婚者们被杀以后他将如何赎罪,并预言他将无疾而终,安享天年,而随身于注家纷云的"来自大海"或"远离大海"的死(εξαλοζ).泰瑞西阿斯和俄地修斯之死两者都超出了《奥德赛》的范围,但在一种不可区分的永恒中重新相连.

在《伊利亚特》中则完全是另一回事,它是一部当前的史诗,这一当前既不受过去支配,也完全随意地决定将来.

歌唱吧,女神!
歌唱裴琉斯(Pleleus, Pélée)之子阿基琉斯的愤怒——
他的暴怒招致了这场凶险的灾祸,
给阿开亚人①带来了
受之不尽的苦难,将许多豪杰强健的魂魄

① Akhaioi, Argiens,泛指希腊人.——译者注

打入了哀地斯①,而把他们的躯体,作为美食,扔给了
狗和兀鸟.②

这是《伊利亚特》最开始几行的诗句,它们点明了诗篇的主题.这是一种当即而过、潇洒一时的愤怒的历史;行动仅持续几天.主人公们都只活跃瞬间.阿基琉斯(阿其利)只想到他的愤怒直到帕特罗克罗斯③被杀,然而当赫克托尔④杀了帕特罗克罗斯以后,他就只想复仇.他没有对人物的过去的重负,既没有回忆,也没有重返.也没有主人公们期待的目标.

当然,为了海伦美丽的眼睛,人们在特洛伊周围交战了九 [137] 年,对于希腊人来说,这似乎是占领城市的好时机.但是这些考虑在阿基琉斯眼里并不起多大作用.当希腊军队的所在地兵临城下、危在眉睫之时,阿伽门农向他派遣各种各样的使者,使者们向阿基琉斯建议的大量赔款都不能使他息怒改变意愿.另一方面,帕特罗克罗斯战死以后,阿基琉斯决定杀死赫克托尔,并知道他自己也将不久于人世,以至他将不能在占领特洛伊中有任何战功.《伊利亚特》是一个肩负其自身意义的孤立时刻,它无论是对过去还是对将来,都无牵挂.于是以其最后的诗句为证,戛然而止,落下帷幕:

就这样,特洛伊人礼葬了赫克托尔,调驯烈马的英壮.⑤

《伊利亚特》的情节很简单,它基于阿基琉斯的两次个人决

① Haides,Hadès,宙斯和波塞冬的兄弟,掌管冥府.这里指冥府.——译者注
② 见《伊利亚特》中译本第1页.——译者注
③ Patroklos,Patrocle,阿基琉斯的助手和伴友.——译者注
④ Hektor,Hector,特洛伊首领.——译者注
⑤ 见《伊利亚特》中译本第597页.——译者注

策. 第--次是在他受到侮辱以后决定撤出他的军营. 这使他能够杀死阿伽门农;雅典娜用她的长发留住了他. 经过她的干涉, 她说服了他, 但同样使他陷入宇眼尖刻的辱骂声中. 在这次自我克制中, 他接受了一部分外部影响和好言相劝. 但是在第二次更为严峻的决策中, 就属于阿基琉斯个人: 他决定杀死赫克托尔, 为帕特罗克罗斯报仇, 而不管这一杀戮就会在不久的将来带来他自己的阵亡. 他应该能够饶恕赫克托尔, 而避开其他特洛伊人对他的报复, 回到他的王国去过他的安逸长寿的日子. 这也正是他的母亲恳求他做的. 头脑一热, 他就决定去走他的绝路.

这一决策丝毫没有考虑其后果. 它不是向未来的宣告; 它是阿基琉斯顽固坚持到最后一刻所作出的, 一直到赫克托尔已在[138]他的矛下, 一直到宙斯把他们两人的灵魂放到金天平上, 看到赫克托尔的托盘直指哀地斯.



普里阿摩斯[①]跟随在场的搬运夫到阿基琉斯家去交赫克托尔的尸体的赎金(特殊收藏品).

同样, 第三个最后的决策也丝毫没有考虑后果: 向普里阿摩斯送还他的儿子的尸体. 这一决策出于还沉浸在帕特罗克罗斯之死的男子汉之手完全出人意料; 为帕特罗克罗斯之死, 他曾经在他的焚尸场上杀了十二个特洛伊俘虏, 并且把赫克托尔的尸

① Priamos, Priam, 特洛伊国王. 赫克托尔之父. ——译者注

体用脚倒拖绕特洛伊城堡三天.这一决策开创了与过去的历史和当时的环境根本不同的形势.

而这样也就图解了时间的另一个概念.当前既不归结为过去,也不归结为将来;每一时刻都创造了一个新的事实.活跃在当前时刻的《伊利亚特》的阿基琉斯对立于既考虑过去、又算计将来的《奥德赛》的俄地修斯.如果这一比较不算过分胆大妄为,那么这就是我想用来刻画现代非决定论和经典决定论所要摆布的时间的两种观念.一方面是一个终久的变迁,其中当前用不可预料的方式构作将来;另一方面是一个永恒的当前,其中时间的流逝只是一种表象,就像自动钢琴中的穿孔带,乐曲的展开都是事先记录的一个程序.

[139]

在这两种概念之间,我们有托姆的概念:确认某些形状类型,由此时间的流动将会给我们带来另外的样本.它在文学上也有其对应物.这就是普鲁斯特①,他放弃保留失去的时间,但是寄存某些插曲,每当这些插曲与他所生活的时刻发生共鸣时,就会使他获得不可名状的欢愉和对死亡的最后胜利."当曾经附在我身上的魂体以一种如此令人陶醉的情景出现时,我同时听到汤匙碰击碟子和锤子敲打车轮所发出的共同的响声;同时听到盖尔芒特(Guermentes)庭院和圣马尔克(Saint - Marc)洗礼堂的砖路面上参差不齐的脚步声;这种魂体仅从事物的实质中汲取营养,并且仅仅对实质,它发现了它的替代物,它的无比美妙.在感觉不能为它带来这种实质的对当前的观察中,在智慧使它干枯的对过去的思考中,在以当前和过去的片断(实质对这些片断仍保留其现实性,但并不保存它对它们所指派的最终适用于狭隘的人类功利的那些性质)构筑意愿的对未来的期待中,魂体就变得憔悴.但是一种早已听到过的响声,或是一种从未闻到过的气味,就会使它复苏,它同时出现在当前和过去,实在的却不是

① Marcel,Proust(1871—1922),法国作家.——译者注

现行的,理想的却不是抽象的,永恒的、并且通常隐藏在事物之中的本质顿时得到解脱,而我们真正的自我,有时是长久以来都似乎不复存在,但也并非完全是这一魂体,这时在接受魂体带给它的天降精华之刻,被唤醒而躁动起来.从时间顺序中解放出来[140]的一分钟,对于我们来说,为了感受它,重新创造了从时间顺序中解放出来的人.对此,人们懂得,魂体在其欢娱中是可信赖的,即使是一种水果的简单的甘美看来不足以在逻辑上概括这一欢娱的原由,人们也会省悟到,'死亡'这一字眼对他已没有意义;超脱了时间,他还会对未来恐惧吗?"

这是与在科学的土地上进行的突变理论相平行的事业,只是它是在个人心理学的土地上进行的.汇集形状的无意识的全体,使得人们在其中辨认新的局势就像辨认经典结果一样,通过它们,在实验领域内对表面上相差很远的现象之间,建立意想不到的、甚至是激动人心的关系:这就是托姆所提出的.这一事业可能是荒唐的,七种初等突变无疑是组成了一个过分局限的天地.但是值得一试,并且树立了关于时间的一种原始观点;这种观点正处于开普勒和牛顿的至高无上的几何学和静力学以及庞加莱的变动无常的混沌之间.几何学的沉船中漂浮出一些残留的宝物.

关于时间看来还有许多可说的.比如,就在我们眼皮底下的进化论,对它就没有物理上的动力系统的例子.它们不是决定论的.要是它们是决定论的,就要使一种物种的进化的各个阶段都完全决定于它所处的状态.然而,它并非如此:对于每一代来说,通过在生存竞争的封闭范围内动员其赋有各种不同基因的个体,并根据环境选取最优的解决办法,由此在向它提供的可能性的领域中探索其进化途径.结果一般是如此尽善尽美,如此适应[141]环境,使人们不由得会由此受到目的论的巨大诱惑:眼睛是为看而精心制作的,是进化的目的才使一种模糊的感光性发展到一种如此完美的器官,以至就这样造就了一个眼睛.专家们拒绝这

种与“神人同形论”过分相近的解释：在他们的眼里，进化有其起源于基因和环境之间、通过个体的中介的复杂的游戏规则，它能给出比所谓的目的论能给出的多得多的信息．他们对牛顿和拉格朗日作出反响：“我们不需要这个假设．”眼睛是进化的果实，而不是进化的目的；为此人们建立了多个模型．

在这些专家中，古尔特①不厌其烦地说明这点，反复揭露目的论者的邪说．伊朗的庞大的化石鹿具有二米多幅度的鹿角，其运用势必会带来严重问题．既然雌鹿没有鹿角，这种鹿角的用途至少是有争议的；于是长出类似的部件是否真是进化的目的？古尔特的回答是双重的．一方面，鹿角的尺寸是不可分解地联系诸如动物的大小之类的基因特征．它们只能一起变异，只要一种进化对于某些特殊的明显不适应的方案来说，整体上能阐释为有利于物种更好地适应环境．另一方面，鹿角的尺寸是一种第二性特征，是雄鹿召唤雌鹿们来交配的标志，宽大的鹿角能使雄鹿在其竞争者中更有魅力．这样，具有宽大鹿角的雄鹿就有更多的机会来繁衍，以至使基因得以延续．因此，进化自身的逻辑就鼓励鹿角的发展，而不能以某种方式说，进化的目的是产生赋有尽可能宽大的鹿角的个体． [142]

这种进化将遵循同一个方向，一直到它变为确实有害于物种的生存为止；或者是环境发生了变化，由开阔的大平原变为稠密的大森林；或者是有利的基因特征发展到不堪忍受，以至鹿角的重量使牲畜寸步难行．进化就这样需要寻求别的途径．如果无路可走，物种就消亡．如果有路可走，进化就沿新的方向重新开始；物种将坚持这一方向直到又达到一个非生存点．

生存理论就对这样的系统建立模型．它们既不是决定论的，也不是目的论的，更不是混沌的；它们是达尔文式的．在其进化

① Stephen Jay Gould(1941—)，美国地质学家、古生物学家和科学哲学家．——译者注

的每一阶段，它们的现行状态是作为趋向于今后状态的自然项而出现的，而不是完全由今后状态决定的项．然而，这一表面完成的状态是虚假的，因为系统不可避免地要进入进化的下一个状态，而这后一状态使系统作为在一次无终点、无目的的行进中的一个瞬间出现，其中每一步都只是为了其自身．

画家们就这样全力以赴在为我们挥笔画出这位不可琢磨的模特——时间老人的画像．每位画家都只画出其丰富易变的品格的一个侧面，而真理不就是在所有这些画像的并列比较之中？我们同样也从我们的日常经验中知道，时间老人是必然的，也是自由的，他在伟大的规律性的一边，也为全新的突然闯入留下了位置．自普鲁斯特以来，我们已经学会，把过去与当前连接于一种共同经验的产生，连接于一种有时是无意识的回忆，其抽象形[143]式会与日常的具体插曲发生共鸣．时间老人的这种焦虑，这种保留其不可避免会走向死亡的行程的欲望，正是科学在以其自己的方式显示．

在普拉多博物馆[①]里，有一幅舍霍姆·博什[②]表现圣·安东尼邪念的小油画．他沐浴在一种奇特的弥漫而又晶莹的光芒中，这种光芒不形成阴影，但造成反光．光芒似乎从油画的背后射出，透过树丛像是显出搞错年代的摩天大楼．在画中处于突出位置的是环绕陡坡的绿色和粗呢长袍的棕色，一位老教士坐在枯树干的空洞上．在其身后伸展出一片浅赭色和嫩绿色构成的大好风光．一扇栅栏门打开在隔断低洼的山谷和树木繁茂的丘陵的小路上．一座乡村教堂隐蔽在一条运河边，背后是浓密的树林．

一种几乎是物质上的分隔以三棵树为标志，其光滑垂直的

---

① Prado，位于西班牙首都马德里的艺术博物馆；又称国立绘画和雕塑博物馆．——译者注

② Jerôme Bosch，或 Hieronymus Bosch（1450？—1516），荷兰画家．——译者注



霍姆·博什，圣·安东尼的邪念(普拉多，马德里) [145]

树干隔开了这一神奇的区域，把圣·安东尼关在河岸边上.而背靠其树的他，弓身向前，下巴与双手支在他的手杖柄上，对一切都视而不见.他的目光注视着向画前方流动的河流，河上漂流着一些半生命、半机械的奇怪生灵，其中有一些已爬上了岸在威胁他.它们的一些同类装备着梯子和铁钩，已经安全到达河流的一个弯曲处，并正在向画后方的光明世界发动进攻.

我们也一样，被宣判为背对我们造就其一部分的世界，而关于世界的客观直接知识始终把我们拒之门外，就像圣·安东尼不能站起、转身关注其家园及其周围的景色，就像柏拉图的囚徒被囚禁在他们的洞穴深处.作为交换，我们的视线落在置身于我们[144]之外的时间长河上，或者不如说落在它的流程的一个片断上，即在有一半被河岸所遮盖的上弯道和在油画的一角消逝的下弯道之间的片断上，对此我们称之为当前.我们在那里的知识惹出了那些奇怪的生灵；这些生灵转过来反对我们；而我们对这些生灵的想象则生成一种避开我们知识的现实.

可是人类在他的冥想中迷了路.他已靠上永恒的彼岸.他的攻击者自身在以散乱的次序进攻，但似乎缺乏信心.他看不见一个脚上长羽毛的怪物挥舞铁锤在向他靠近.他看不见奇怪生灵在围绕他的大树.瞄准画面前方的箭既射不到他，也射不到伸向[146]他的小鬼的爪子.天空到处是湛蓝的.

附录 1: 庞加莱的一个论题的序曲和赋格曲

这里是我们将要展开的一个论题.

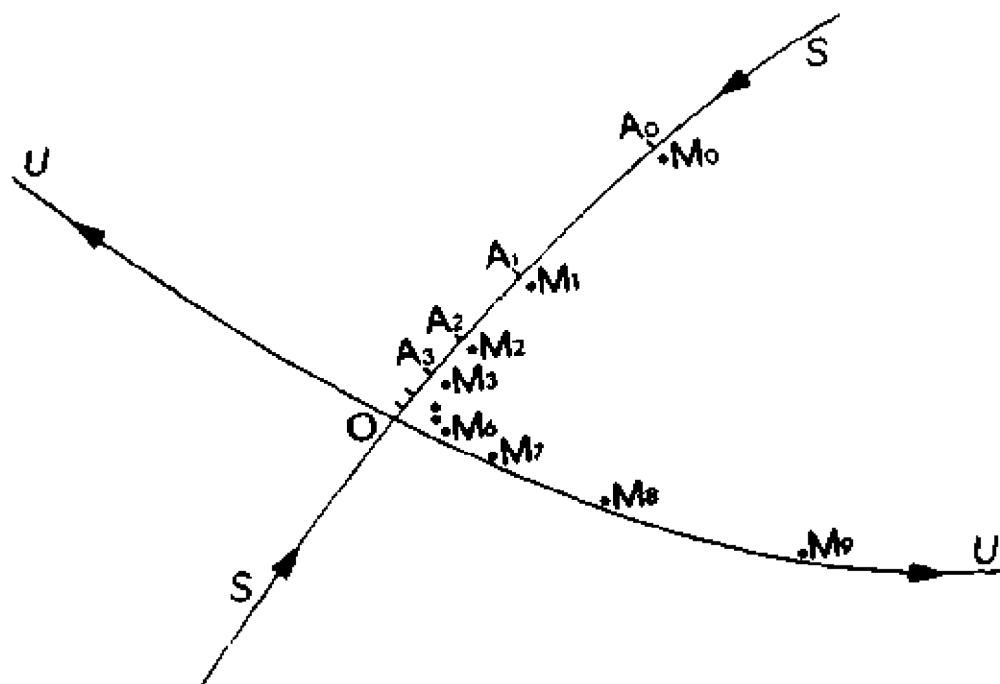


图 1 稳定曲线 S 与不稳定曲线 U 相交于一个不动点 O.

这张图出现在庞加莱的著作中,它有关我们曾经在第 2 章中叙述过的研究.我们已经看到,它把一个空间的动力系统表达为平面变换.更确切地说,用一个平面切割一条参照周期轨线, [149] 就可把这条轨线附近的轨线代替为它们与横截平面的交点所形成的双重无限(趋向于过去与趋向于将来)点列.

这里我们只需知道图 1 表示一个平面变换：对一个点 M_0（时刻 0），变换联系点 M_1（时刻 1），然后是点 M_2（时刻 2），如此等等. 如果想向上追溯时间，那么可得到点 M_{-1}，然后是点 M_{-2}，如此等等.

点 O 是特殊的（它来自所选取的平面与参照周期轨线的交点）：这是变换的不动点，变换无限次地把它变为自己. 无论是时刻 1，2，…，还是时刻 -1，-2，…，人们总是发现它在初始位置.

相交于 O 的曲线 S 和 U 的两个分支上也汇集了一些特殊点. 曲线 S 汇集了所有其正迭代趋向于 O 的点：如果在 S 上选取一个点 A_0，那么会察觉到，点 A_1，A_2，…都位于曲线 S 上，并且无限接近于 O. 如果在 S 上取另一个点 A'_0，情况也一样. 相反，如果不幸从一个不在 S 上但非常接近 S 的点出发，就如图 1 中的点 M_0，那么人们将发觉其逐次迭代 M_1，M_2，…仍然在 S 的附近，并且在一段时间内接近 O，但是总有某个时刻达到后，它就开始远离 S，从此就向外急速跌落.

至于曲线 U，它汇集了负迭代趋向于 O 的点. 这些点在某

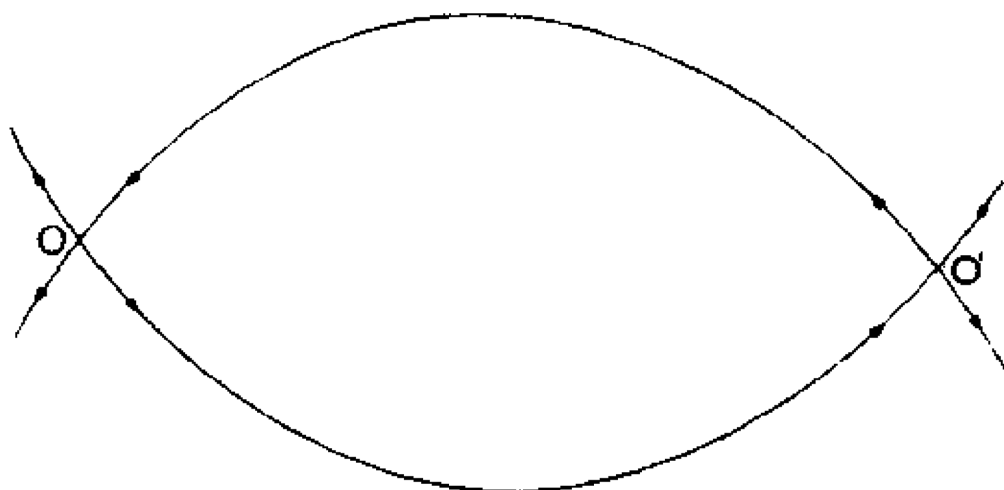


图 2 变换形成两个相关联的不动点：其中一个不动点的稳定曲线变为另一个不动点的不稳定曲线.

种意义下是在混沌初开之时从 O 出发的点.它们的正迭代仍然位于同一条曲线 U 上,但离 O 点越来越远,并且偏离非常迅速.

论题已经提出;我们开始来讨论：这涉及把图形补全,并展开这一论题.首先可做的是延长 S 和 U.这可以通过多种方式来做,其中某些方式颇有意义. [150]

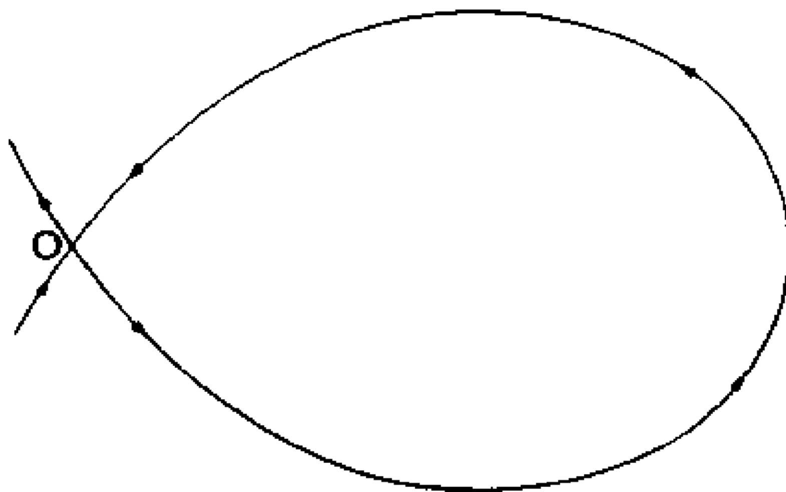


图 3 从 O 点出发的稳定分支和不稳定分支相接合,形成单独的同一条曲线. [151]

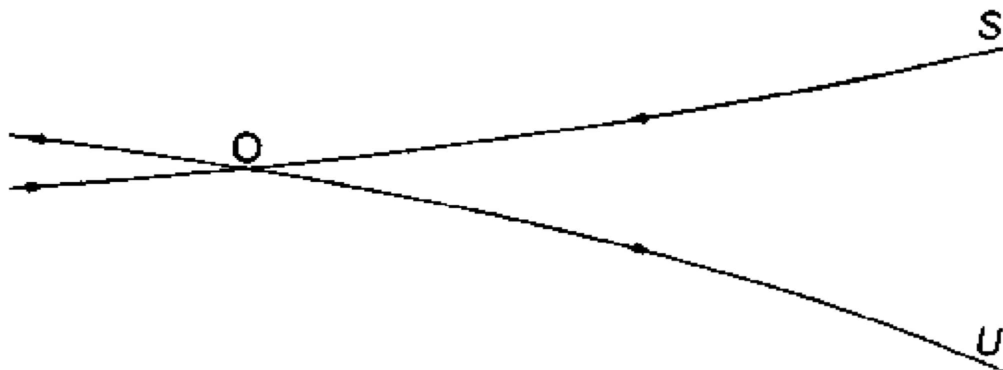


图 4 稳定曲线 S 和不稳定曲线 U 相互无限远离,不再相交.

前两种情形看来相当特殊，它们奇迹般地使一个不动点的曲线 S 成为另一个不动点（或同一个不动点）的曲线 U. 第三个图要求一点能够沿曲线 U 从无限远出发（或沿曲线 S 达到无限远）. 然而，在一些物理或力学系统中，考虑到能量，点被局限在空间的一个有限区域内，一种这样的演化因而是不可能的.

一种更为一般的、意义大得多的情形是庞加莱所选定的：从点 O 出发的曲线 S 和 U 横截相交. 由此得到的点被庞加莱称为同宿点①.

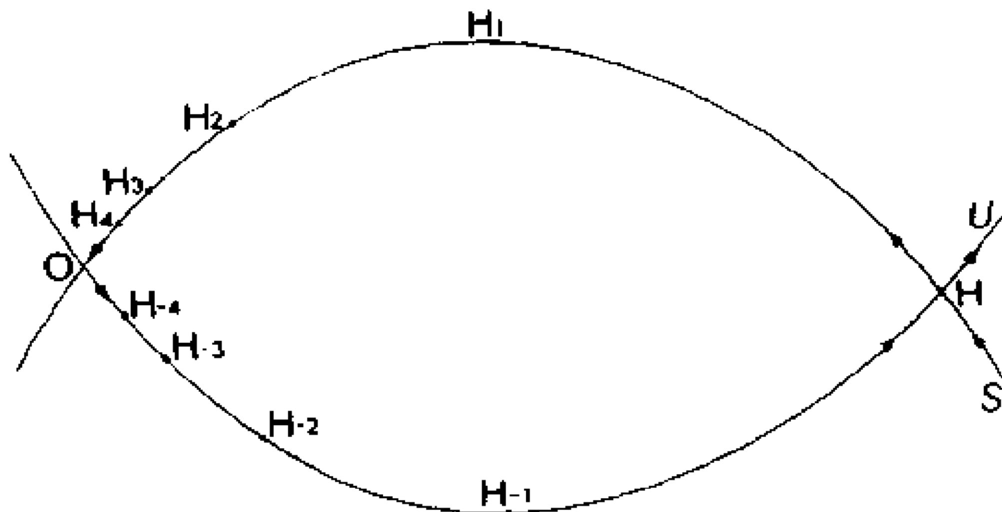


图 5　从不动点 O 出发的稳定曲线和不稳定曲线交于所谓同宿点 H. 它本身不是不动点；我们已表示出其开始几项的正迭代和负迭代.

这一清清楚楚的图形会在我们的眼睛下喷发出一个扭曲的旋涡.

① point homocline. 原书在这里还谈到，近年来，法文文献中又称它为 point homoclinique. 这是因法英、英法的两次翻译造成的.——译者注

点 H 属于曲线 S.其正迭代 $H_1,H_2,\cdots$在 S 上趋向于 O(图5).

曲线 U 通过 H.于是曲线 U 的变换通过 H_1.如果在 U_1 上取 H_1 附近的点 M,则它是 U 上的 H 的附近的点 P 的变换象(图 6):

$$M_{-1}=P.$$

[152]

点 M_{-1}和 P 因而是 U 的同一个点的变换象.这就给出 $M_{-2}=P_{-1}$.取逐次变换,得到 $M_{-3}=P_{-2}$,再是 $M_{-4}=P_{-3}$,如此等等.但是由于 P 属于 U、负迭代趋向于 O,以致 M 的负迭代 $M_{-1},M_{-2},\cdots$也将如此.这就指出 M 属于 U,并且 U_1 无非是 U 的一个分支.

这样我们就得到引人注目的结论：曲线 U 的弧 $U_1,U_2,\cdots$通过 $H_1,H_2,\cdots$.由于点 $H_1,H_2,\cdots$本身属于 S,故这些点是同宿点.当然,对于 $H_{-1},H_{-2},\cdots$有同样的结论.

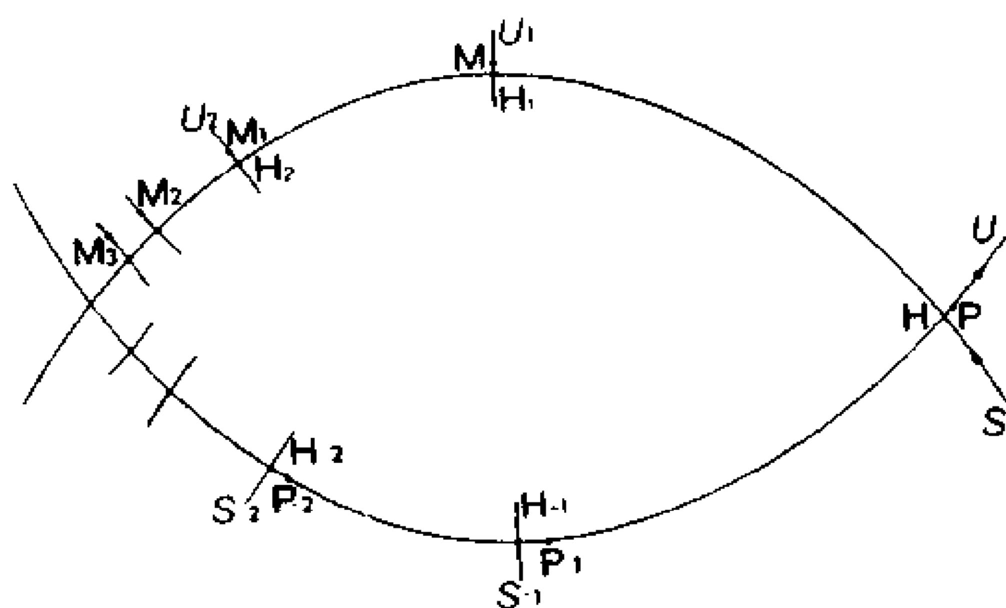


图 6 位于稳定曲线 S 的 H 的每一个正迭代 $H_1,H_2,\cdots$都经过不稳定曲线 U 的一段弧.

我们曾经是从一个单独的同宿点出发，而现在我们又发现「153」双重无限个这样的点．但是我们的伸展并不停滞在那里，因为现在应该把所有的弧 U_1、U_2，…与曲线 U 相连接（以及所有的弧 S_{-1}、S_{-2}、…与曲线 S 相连接）．需要注意的是，在这些弧的每一段上都有一个应予重视的通行方向：从 H 到 P，然后是从 H_1 到 $P_1 = M$，再是从 H_2 到 P_2，如此等等．

我们不加深思地来处理，就会如图 7：

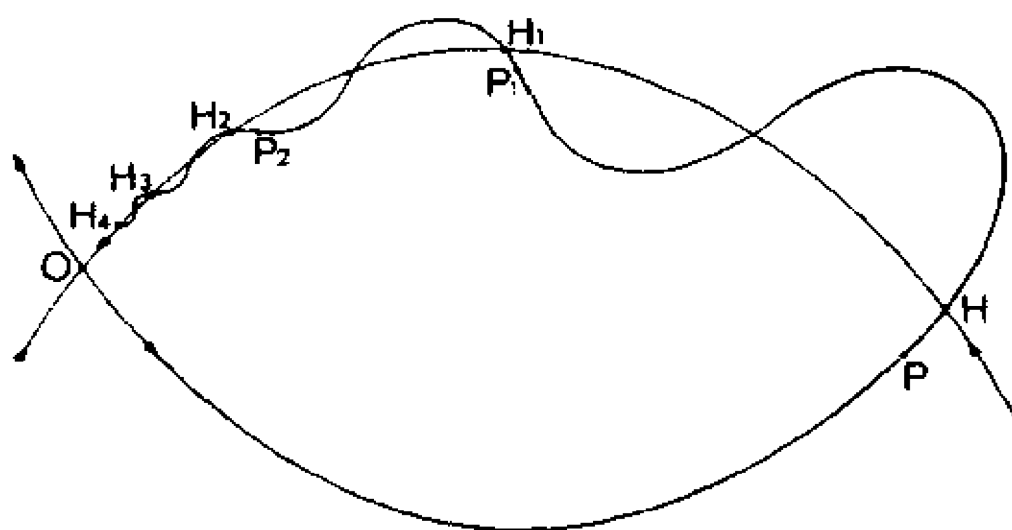


图 7 第一种连接尝试，其中只考虑在点 H_1，H_2，…上，曲线 U 应该由下而上地穿过曲线 S．

这张图显然是错的．如果我们在 U 上取一个非常靠近 H 的点 P，其正变换象 P_1，P_2，…都属于 U．此外，由于 P 很靠近 S 的一点（即 H），但并不属于 S，我们知道其逐次正迭代 P_1，P_2，…的状态：它们将停留在 S 附近，趋向于 O，一旦达到这点的某个邻域，它们将改变轨道，并沿着 U 重新出发（见图 8）．于是就会存在 P 的一个迭代 P_n，它相对于所有直到 P_{n-1} 为止的「154」迭代 P，P_1，…来说，处于 S 的另一边．

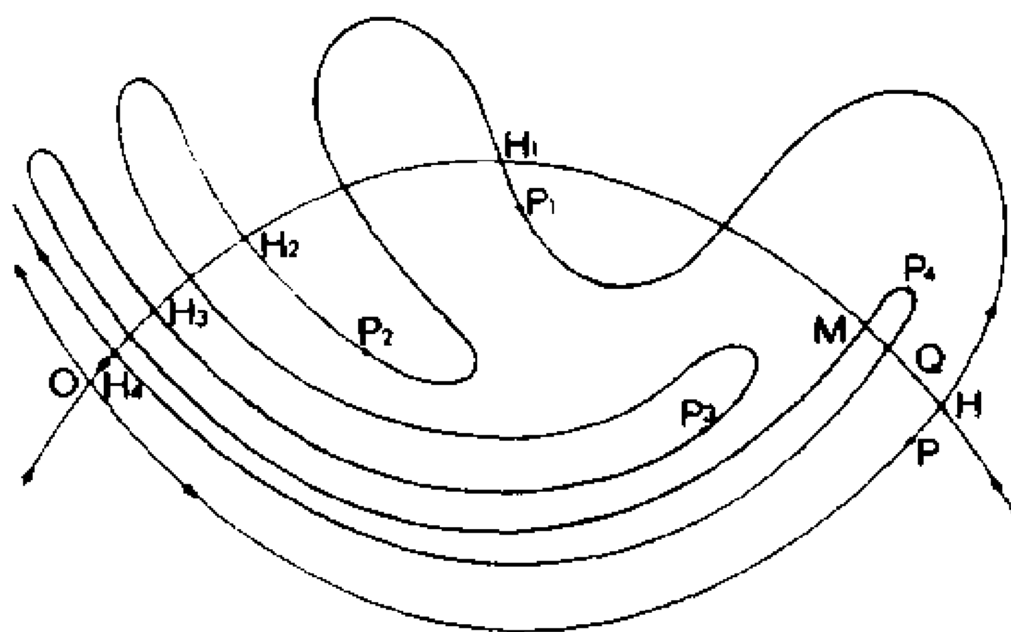


图 8 第二种连接尝试,其中通过点 P 的逐次迭代.　　[155]

但是点 P_n 在弧 H_nH_{n+1}上,其端点 H_n 和 H_{n+1}位于 S 上的 O 的附近,于是它们为了通过 P_n 应该过分地延伸.从而应该在点 P 附近的两个点 M 和 Q 上跨越边界 S.当然,下一条弧 $H_{n+1}H_{n+2}$将更加沿着 S 延伸,下一条弧 $H_{n+2}H_{n+3}$又甚,以至形势变得越来越复杂,使得图象表示逐渐变得不可能.

然而,这还不是全部!还有 M 和 Q 也是同宿点,而它们并不在序列

$$\cdots,H_{-2},H_{-1},O,H_1,H_2,\cdots$$

之中.

与上面同样的推理,我们看到,正迭代(M_1,Q_1),(M_2,Q_2),…和负迭代(M_{-1},Q_{-1}),(M_{-2},Q_{-2}),…同样都是同宿点.这意味着,不仅是弧 H_nH_{n+1},并且它的正负迭代,也就是说,事实上,整个弧序列

$$\cdots,H_{-2}H_{-1},H_{-1}H,HH_1,H_1H_2,\cdots$$

应该回来与曲线 U 相交于两点.如果说这已相当清楚:H_nH_{n+1}以后的 S 上的弧与曲线 U 相交于越来越靠近 H 的点,那么就会

导致 H_nH_{n+1} 以前的 S 上的弧同样会与曲线 U 相交，以至要求"去找到它们"；这就需要弧 OH 以后的曲线 U 的分支曲折迂回地与 $H_{n-1}H_n$、$H_{n-2}H_{n-1}$、…相交，一直到 H_1H。

当然，可以交换 S 和 U 的角色，同样得到一个新的双重同宿点列。这样就得到一张真正"编织"的图形，其中两条曲线 S 和 U 交织为一张越来越紧密的网，它当然已超出我们的想象能力。如果我们能自省说，这张图无非是天体力学运动的复杂性的苍白无力的反映，那么我们就会更深切理解二百年来数学家所［156］遇到的困难。

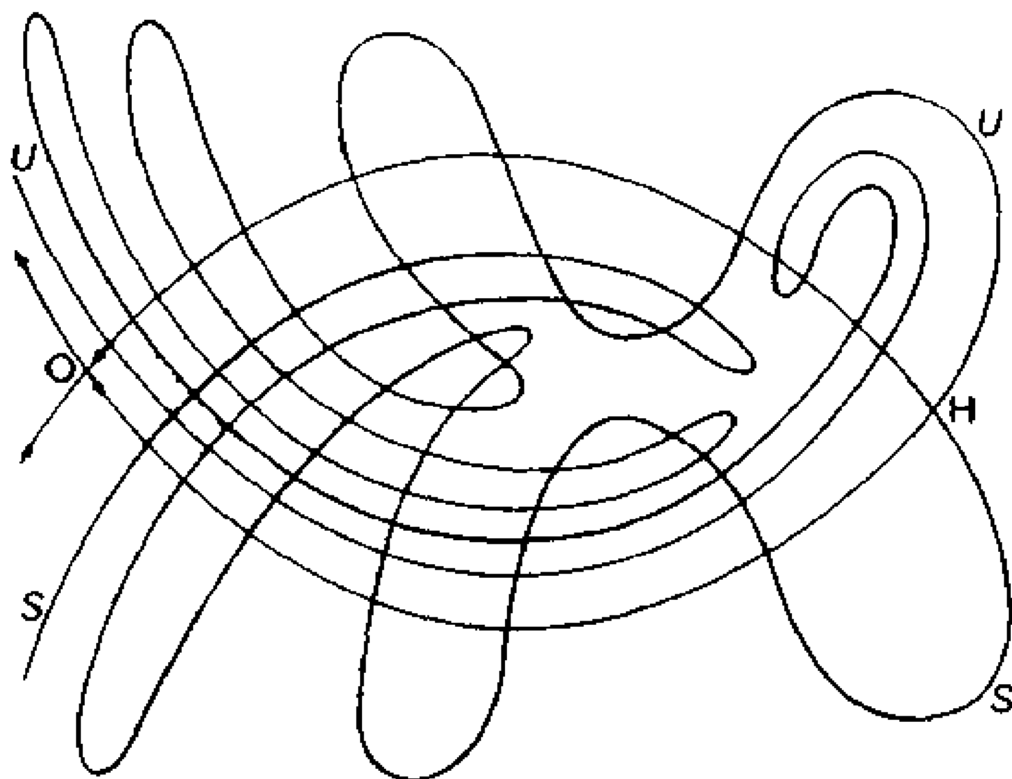


图9 第三种最后的连接尝试。图形并未完成，曲线 U 的折叠应该沿曲线 S 无限堆积，而曲线 S 的折叠应该沿曲线 U 无限堆积。人们将看到大量新的同宿点的出现。［157］

附录 2：费根鲍姆分岔

在本书中介绍的各种概念——周期轨线、混沌、平衡——都可以用数字来明确表达 为此，必须要有一个袖珍计算器，最好是可编程序的.

近几年来，人们已经意识到，一个特别简单的模型会窝藏着大量的动力系统的复杂性. 其中涉及区间[- 1,1]到自身的变换，它把点 x 变为 $1-\mu x^2$. 这个变换当然依赖于参数 μ 的选择，它将固定在 0 和 2 之间.

一旦选定了 μ，就可迭代变换. 这就是说，选取初始点 x_0，其变换是 $x_1=1-\mu x_0^2$，x_1 的变换是 $x_2=1-\mu x_1^2$，x_2 的变换是 $x_3=1-\mu x_2^2$，如此等等，其递推公式为：

$$x_{n+1}=1-\mu x_n^2.$$

我们看看由此给出了什么.

A. μ 的值在 0 和 0.75 之间

为确定起见，我们取 $\mu=0.5$. 读者可自行对 μ 的值选在 0 和 0.75 之间来重新计算.

这里是由 $x_0=0$ 出发得到的第一个值序列： [159]

$$x_0=0,$$

$$x_1=1,$$

$$x_2=0.5,$$

$$x_3 = 0.875,$$
$$x_4 = 0.6171875,$$
$$x_5 = 0.809539795,$$
$$x_6 = 0.67232266,$$
$$x_7 = 0.77399112,$$
$$x_8 = 0.700468872,$$
$$x_9 = 0.754671679,$$
$$x_{10} = 0.715235328,$$
$$x_{11} = 0.744219212,$$
$$x_{12} = 0.723068881,$$
$$x_{13} = 0.738585696,$$
$$x_{14} = 0.727245584,$$
$$x_{15} = 0.735556929,$$

如此等等,并发现

$$x_{20} = 0.731312469,$$
$$x_{25} = 0.732205977,$$
$$x_{30} = 0.732018182.$$

迭代收敛于极限点

$$\bar{x} = 0.732050807.$$

也可以从另一个初始点出发.比如,取 $y_0 = -0.5$,我们看到,这给出:

$$y_0 = -0.5,$$
$$y_1 = 0.875,$$
$$y_2 = 0.6171875,$$
$$y_3 = 0.809539795,$$
$$y_4 = 0.67232266,$$
$$y_5 = 0.77399112,$$

$$y_{10} = 0.723068881,$$
$$y_{15} = 0.733930922,$$
$$y_{20} = 0.731655187,$$
$$y_{25} = 0.732133965,$$
$$y_{30} = 0.132033324.$$

迭代收敛于极限点

$$\bar{x} = 0.732050807.$$

[160]

这与前面一样.这样就可察觉,所处理的是在第 3 章意义下的耗散系统:不管出发点 x_0 是什么,系统的自然演化总把它不可避免地引向在点 0.732050807 上静止.

点 0.732050807 因而对于参数 $\mu = 0.5$ 来说,是系统的一个稳定平衡.可以指出,对于在 0 和 0.75 之间的参数 μ 的所有值,系统具有唯一的稳定平衡,其精确位置连续依赖于 μ.

人们甚至可以给出一个把 $\bar{x}$ 联系 μ 的显式.这只需把 $\bar{x}$ 记成变换的不动点:

$$\bar{x} = 1 - \mu\bar{x}^2,$$

它向我们给出一个二次方程:

$$\mu\bar{x}^2 + \bar{x} - 1 = 0,$$

其中 $\bar{x}$ 是 -1 和 1 之间的唯一的根:

$$\bar{x} = \frac{1}{2\mu}\left(-1 + \sqrt{4\mu + 1}\right).$$

对于 $\mu = 0.5$,这个公式恰好给出:

$$\bar{x} = -1 + \sqrt{3} = 0.732050807.$$

B. μ 的值在 0.75 和 1.25 之间

为明确起见,取 $\mu = 1$.再次请读者选取另一个该区间中的 μ 的值,并自行作出计算.

这里是由 $x_0 = 0$ 出发得到的第一个值序列:

$$x_0 = 0,$$
$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 0,$$
[161] $$x_3 = 1.$$

很快就可察觉,所取的值在 0 和 1 之间交替.用动力系统的术语来说,这是一个周期为 2 的周期轨线.

但是可能这一发现是瞎碰上的,因为初始点 $x_0 = 0$ 刚好也在其中.为了进一步看出这点,我们取另一个值来作为初始点,比如,0.5:

$$y_0 = 0.5,$$
$$y_1 = 0.75,$$
$$y_2 = 0.4375,$$
$$y_3 = 0.80859375,$$
$$y_4 = 0.346176147,$$
$$y_5 = 0.880162075,$$
$$y_6 = 0.225314721,$$
$$y_7 = 0.949233276,$$
$$y_8 = 0.098956187,$$
$$y_9 = 0.990207673,$$
$$y_{10} = 0.019488764,$$
$$y_{11} = 0.999620188,$$
$$y_{12} = 0.0007594796,$$
$$y_{13} = 0.999999423,$$
$$y_{14} = 0.0000011536,$$
$$y_{15} = 1,$$
$$y_{16} = 0.$$

非常迅速地又落入 2 - 周期轨线.

令人奇怪的是公式

$$x=\frac{1}{2\mu}(-1+\sqrt{4\mu+1})$$

始终成立，并且给出变换的不动点，这里是

$$x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})=0.618033988.$$

我们的计算器有效地确认，这个点是一个平衡：取 $x_0=$ 0.618033988，它就无限次显示这同一个值.

然而，这是一个不稳定平衡！为了说明这点，我们让它尽可能小地偏离一点：改变最后一位十进小数，并从 $y_0=$ [162] 0.618033989 出发.我们观察偏差如何扩大，如何加速下落：

$$y_0=0.618033989,$$
$$y_1=0.618033988,$$
$$y_2=0.618033989,$$
$$y_3=0.618033988,$$
$$y_4=0.618033989,$$
$$y_5=0.618033988,$$
$$y_6=0.618033989,$$
$$y_7=0.618033987,$$
$$y_8=0.61803399,$$
$$y_9=0.618033987,$$
$$y_{10}=0.61803399,$$
$$y_{11}=0.618033986,$$
$$y_{12}=0.618033991,$$
$$y_{13}=0.618033985,$$
$$y_{14}=0.618033993,$$
$$y_{15}=0.618033983,$$
$$y_{16}=0.618033995,$$

$$y_{17}=0.61803398,$$
$$y_{18}=0.618033999,$$
$$y_{19}=0.618033975,$$
$$y_{20}=0.618034005,$$
$$y_{21}=0.618033968,$$
$$y_{22}=0.618034014,$$
$$y_{23}=0.618033957.$$

我们注意到,奇数项都比 $\bar{x}$ 来得小,并且递减;而偶数项都比 $\bar{x}$ 来得大,并且递增.前者趋向于零,而后者趋向于 1:

$$y_{99}=0.065162952,$$
$$y_{100}=0.995753789.$$

序列前 6 项所表现出来的在 0.618033989 和 0.618033988 之间的摆动是由于计算器只能显示它所知道的十进小数部分.这样,对于 y_1 所显示的 0.618033988 只是冰山露出水面的部[163]分,而重要的是浸入在水中的部分,是它最终使系统失稳.由此可以看到这类稳定性问题在数值计算中有多么重要.

C. μ 的值在 1.25 和 1.368 之间

比如,取 $\mu=1.3$.我们乐于让读者发现一条周期为 4 的轨线,所有其他轨线都趋向于这条轨线.它将依次通过点:

$$-0.01494637,$$
$$0.999709587,$$
$$-0.29924503,$$
$$0.88358813.$$

点 $\bar{x}=0.573069199$ 是一个不稳定平衡.

也存在一条 2-周期轨线,它通过两个点:

$$\frac{1}{2\mu}(1+\sqrt{4\mu-3})=0.955092191,$$
$$\frac{1}{2\mu}(1-\sqrt{4\mu-3})=-0.18586142.$$

它是不稳定的，这点容易验证.

这是一个复述前面内容的好时机：我们已经跨越了两个突变. 我们正处于第 3 章叙述过的一般局势，即依赖于一个参数 μ 的动力系统. 只要参数 μ 停留在区间[0,0.75]中，系统的定性状态就不变：它表现为一个随 μ 连续变化的稳定平衡；所有轨线都趋向于它. 只要参数 μ 停留在区间[0.75,1.25]中，系统的定性状态不变：它表现为一条稳定的周期为 2 的轨线，所有其他轨线都趋向于它. 但是跨越值 $\mu=0.75$ 会改变系统的定性状态，其意义为稳定平衡被破坏（或者不如说，它被取代为不稳定的平衡形式，从而对于动力学来说没有意义），代之以一条 2－周期轨线. 这样，$\mu=0.75$ 是在第 3 章的一般意义下的一个突变值，但不是初等突变理论的狭义下的突变值，因为系统不再是耗散系统. [164]

同样，$\mu=1.25$ 是一个突变值，因为 2－周期轨线失去其稳定性，代之以一条 4－周期轨线.

D. μ 的值在 1.368 和 1.401 之间

我们观察周期的逐次加倍. 更确切地说，存在一个趋向于 1.401 的递增突变值的无限序列 μ_n：

$$1.368=\mu_2<\mu_3<\cdots<\mu_n<\mu_{n+1}<\cdots<1.401.$$

使得如果 μ 在 μ_n 和 μ_{n+1} 之间，系统具有一条所有其他轨线都趋向于它的周期为 2^{n+1} 的稳定轨线. 这样，在 μ 的递增方向上跨越这些突变值，对应的周期加倍.

以一种极好的精度可得：

$$1.401-\mu_n=\text{常数}\times(4.6692\cdots)^{-n}.$$

或者，如果乐意的话，也可表示为：

$$\frac{1.401-\mu_n}{1.401-\mu_{n+1}}=4.6692\cdots.$$

数 4.6692…就是费根鲍姆常数，现在它已经以极好的精度

已知，并且出现在许多其他情况中，相对于一些接二连三的分岔
[165] 现象来说，它看来有一种深刻的物理意义.

E. μ 的值在 1.401 和 2 之间

这一区域鲜为人知. 这是一个人们正在寻求导线的未被开发的区域. 两件事已被肯定：

a)对于在这一区域中所取的 μ 的极大多数的值，系统有一种混沌状态. 所有找到的周期轨线都是不稳定的，并且系统会随机地从区间$[-1,1]$的一个端点游动到另一个端点. 请读者按他本人的意思选取一个 μ 的值，一个初始点，并形成其逐次迭代. 有极大的可能会只观察到值的无序延续，除了偶然性以外，看不出有任何规律.

b)然而，在这无序支配着的荒漠中，也有少许有序和稳定的绿洲. 请读者自行在区域 $1.75 < \mu < 1.7685$ 中(比如取 $\mu = 1.76$)开发. 我们给他留下他在那里发现的惊喜.

这一有序与混沌的难分难解，这一通过周期的加倍现象来进行的两者之间的渐进过渡，这些在已建立的无序中挽救的少量有序，都只能使人们回忆起第 2 章中的图 16 和图 17 以及庞加莱的分析. 看来真是这样：有序与混沌是不可分隔的，并且在
[166] 天体力学中或是在数字游戏中始终是一起出现的.

文献导引

第 1 章大量借鉴于阿列克桑德尔·库阿瑞(Alexandre Koyré).我的关于开普勒和牛顿的知识大部分都来自权威著作:《天文学革命》(巴黎,1961)和《牛顿研究》(巴黎,1968).

第 2 章触及一些现实问题,它们是许多数学家和物理学家关注的中心.有序、混沌、湍流、熵是这一领域中的关键词,并且也激起许多通俗化的尝试.庞加莱的通俗著作(《科学和假设》、《科学和方法》、《科学的价值》)始终有其现实意义.

关于突变理论,基本著作是托姆的著作:《结构稳定性和形态发生学》,以及泊斯通和斯梯沃特(Stewart)的著作《突变理论》是其补充.两者都不能真正为非专家所接受,但是大量通俗化的文章已经问世,特别是季曼在《科学美国人》上所写的文章,以及作者在《科学研究(la Recherch)》上发表的文章;它们的某些反响可在第 3 章中找到.

有必要说第 4 章只反映作者的个人意见吗?

最后,本书源于一种作者在不同的年代和不同的环境下由让一彼埃尔·奥班(Jean - Pierre Aubin)、让一马尔克·列维一勒勃隆(Jean - Marc Lévy - Leblond)、勒内·托姆(René Thom)所激起的对知识的好奇.这里向他们致以友好的谢意. [167]

关于本书

近年来，关于时间和变化的科学描述，已经取得一些戏剧性的进展. 这些新的科学观念冲毁了暗淡无光的经典决定论，已经改变了我们的科学实践和我们的知识概念. 它们打乱了可计算和不可预测的界限、决定性和随机性的界限、有序和无序的界限. 通过令人惊奇的实验和突如其来的悖论的解释，这些观念今天已经可向门外汉传播. 智者们为我们描述的以椭圆轨道绕太阳运转的行星形象，在开普勒以后，已被强化为一种整体的文化，由此出发而产生一些所谓精确科学. 直至今日，牛顿的发现仍然是整个科学理论的范例. 同样，我们也可通过一些生动的形象：阿尔诺德的猫、斯梅尔的马蹄铁、托姆的皱褶，来概述新的概念. 这些形象在所有科学领域中都唤起反响，并且注定要成为我们的文化遗产的一部分.

这里是科学家族的相片册中的几幅新图案.

本书曾于 1984 年获得法国的让—若斯当(Jean - Rostand)科学普及奖.